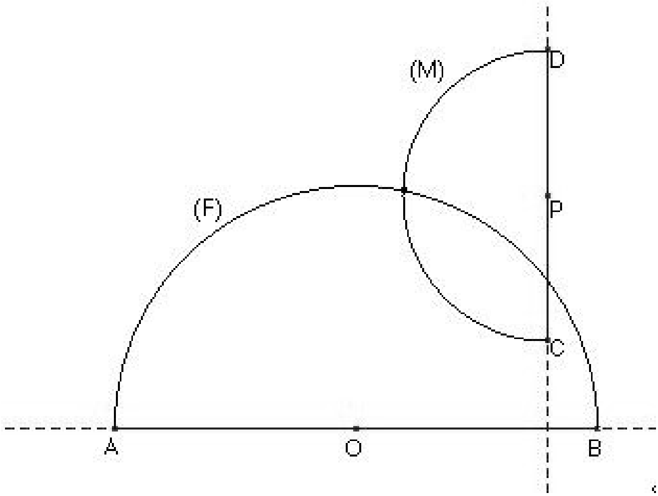
PROBLÈME DU TRIMESTRE N° 7

proposé par André **VIRICEL**

Ce problème peut être posé, en travaux de recherche, dès la classe de seconde. Utiliser alors un calque représentant le plan de (M), qui glissera sur la feuille de papier représentant le plan de (F).

Dans un plan fixe, on donne le demi-cercle (F) de diamètre [AB], avec AB = 10 cm ; (F) est au-dessus de [AB].
Dans un plan mobile, on donne le demi-cercle (M) de diamètre [CD], avec CD = 5 cm, et P milieu de [CD] ; (M) est à gauche de [CD].
On déplace par translation de plan mobile, de manière que (CD) reste toujours perpendiculaire à (AB).



Quel est l'ensemble des points P tels que les deux demi-cercles aient :
1) un point commun (comme sur la figure ci-dessus) ?
2) deux points communs ?

Solution du problème précédent (n°6)

Solution de l'auteur, A. **VIRICEL**.

$\boxed{1}$ La relation de Stewart donne $\overline{CA}.b^2+\overline{AB}.c^2+\overline{BC}.a^2+\overline{CA}.\overline{AB}.\overline{BC}=0$.
Soit x l'abscisse de C.

$(11-x)b^2+5c^2+(x-17)(2b-18)^2+6(11-x)(x-17)=0$

$b^2(11-x+4(x-17))-72b(x-17)+(x-17)(324+5(11-x))=-6c^2$

$b^2(x-19)-24b(x-17)+(x-17)(130-2x)=-2c^2$ (E)

Le polynôme en b est le produit d'un réel par un carré parfait : son discriminant est nul.

$\Delta' = 144(x-17)^2+(x-17)(x-19)(2x-130)$

$\Delta' = (x-17)(x-11)(x-1)$

Il y a donc trois solutions :

- $x=17 \Rightarrow b^2=c^2$. B et C sont confondus, tout point du plan vérifie $b=\pm c$.
- $x=11 \Rightarrow c^2=(2b-18)^2$. C et A sont confondus, c'est l'équation de départ.
- $x=1 \Rightarrow$ ce résultat donne le troisième foyer. En remplaçant x par 1 dans l'équation (E), il vient $c^2=(3b-32)^2$, soit $\begin{cases} c=3b-32 \\ c=32-3b \end{cases}$

  En utilisant la relation initiale, on est conduit à $2c=3a-10$ ou $2c=3a+10$.

$\boxed{2}$ Soient a_1, a_2, a'_1, a'_2 les abscisses sur Ay de A_1, A_2, A'_1, A'_2.

① a_1 choisi positif donc a_2 négatif.

Soit θ l'angle des axes Ax, Ay. D'après l'énoncé $BA_1=9-\dfrac{a_1}{2}$.

Or $BA_1^2=a_1^2+36-12a_1\cos\theta=\left(9-\dfrac{a_1}{2}\right)^2$

$a_1^2-4(4\cos\theta-3)a_1-60=0$

Si au lieu de A_1 sur la petite boucle on prend A'_1 sur la grande, $a'_1<0$,

l'énoncé donne $BA'_1=9+\dfrac{|a'_1|}{2}=9-\dfrac{a'_1}{2}$.

On est donc conduit à la même équation $a'^2_1-4(4\cos\theta-3)a'_1-60=0$.

On en déduit $\overline{AA_1}.\overline{AA'_1}=-60$.

La courbe est donc anallagmatique dans l'inversion (A ; -60).

② Avec les points A_2 et A'_2 on obtient $a_2^2 - 4(4\cos\theta + 3)a_2 - 60 = 0$ d'où, de même, $\overline{AA_2}\,\overline{AA'_2} = -60$

③ A''_1 milieu de $A_1A'_1$ est défini par l'équation polaire $\rho = 8\cos\theta - 6$ (avec $\rho = \overline{AA''_1}$) et A''_2 par $\rho = 8\cos\theta + 6$.
Ces deux équations correspondent au même limaçon de Pascal. Le cercle générateur, ensemble des points α milieux de $A''_1A''_2$, a pour diamètre AA'' ($\overline{A\alpha'}_{Ox} = 8$) , la distance cote est 6.

④ Un raisonnement analogue conduit avec B ou C montre que la courbe est anallagmatique dans les inversions (B ; 96) et (C ; 160).
Dans chacune des trois inversions, chaque foyer non-pôle est inverse de l'autre.