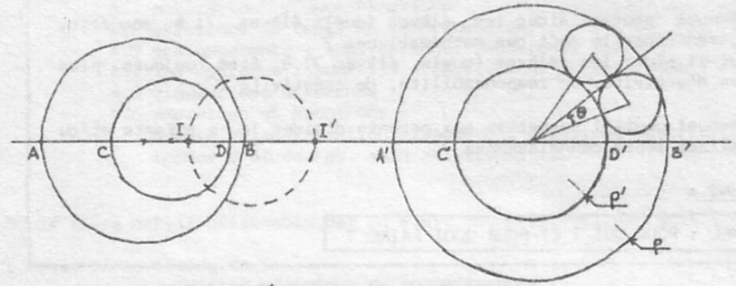
Solution du problème n°5, proposé par R. MULLER de Gérardmer

PROBLÈME Solution du numéro précédent

Le résultat est évident si C et C' sont concentriques.
D'où l'idée de se ramener à cette situation par une inversion convenable.
Soient I et I' les points limites du faisceau défini par C et C'. Le cercle de diamètre II' étant orthogonal à C et C', une inversion de centre I (ou I') transforme C et C' en deux cercles concentriques.
D'où la justification de la question posée : "Si la chaîne des cercles se referme, il en sera de même quelle que soit la position initiale".

Relation entre les rayons R (de C), R' (de C'), la distance d des deux centres et le nombre n de cercles de la chaîne :
Si on choisit pour centre d'inversion I celui des points limites extérieur à C et C', et pour puissance d'inversion un réel négatif, la disposition des points sur l'axe est la suivante :



On a alors $\sin\theta = \dfrac{\rho-\rho'}{\rho+\rho'}$, avec ρ et ρ' les rayons des cercles transformés de C et C'. Comme $\dfrac{\rho-\rho'}{\rho+\rho'} = -\dfrac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}} = -\dfrac{\overline{D'B'}}{\overline{D'A'}}$,

on a : $\left(\dfrac{\rho-\rho'}{\rho+\rho'}\right)^2 = \dfrac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}} \div \dfrac{\overline{D'A'}}{\overline{D'B'}}$.

Or la dernière expression est le rapport anharmonique (A',B',C',D'), rapport conservé dans l'inversion, égal à : $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \div \dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$

lui même égal , par utilisation de la relation de Chasles, à
$\dfrac{(R-R')^2-d^2}{(R+R')^2-d^2}$

La chaîne des cercles se referme au bout d'un tour si

d'où la relation cherchée : $\boxed{\dfrac{(R-R')^2-d^2}{(R+R')^2-d^2} = \sin^2\dfrac{\pi}{n}}$

REMARQUES

1°) Se donnant n, R et R', on peut déterminer d ; il faut que
Plus n est grand, plus R' est proche de R :
par exemple, R = 9, R' = 7/5 et d = 32/5 pour n = 6
ou R = 8, R' = 2 et d = 1,48 pour n = 5.

2°) Si la chaîne se referme au bout de k tours, on remplace $\sin\frac{\pi}{n}$ par $\sin\frac{k\pi}{n}$ dans la relation précédente (k et n premiers entre eux).

3°) Si on étudie le même problème avec deux cercles extérieurs, on trouve : $\dfrac{d^2-(R+R')^2}{d^2-(R-R')^2} = \sin^2\dfrac{k\pi}{n}$