PROBLÈME DU TRIMESTRE n°6

N.D.L.R. Les vecteurs, qui étaient « fléchés » à la main, sont indiqués ici en caractères ***italiques gras***.

1°) Sur un axe ***Ox*** de vecteur unitaire ***t***, on place les points A et B tels que OA = 11 et OB = 17 (*mesures algébriques*).
On considère l'ensemble des points M du plan tels que, en posant AM = a et BM = b, on ait soit 2b + a = 18, soit 2b – a = 18, ensemble appelé Ovale de Descartes.
Montrer qu'il existe un point C de ***Ox*** tel que, en posant CM = c, c et b soient liés par des relations du premier degré, ainsi que c et a. Autrement dit, les Ovales de Descartes ont trois foyers.

2°) Un axe ***Ay***, mené de A, de vecteur directeur ***u***, coupe successivement la grande boucle en A'_1, la petite boucle en A'_2 puis en A_1, et enfin la grande boucle en A_2.
Sachant que (***Ox***, ***Oy***) = θ (mod. 2π), calculer $AA_1 = a_1$, $AA'_1 = a'_1$, $AA_2 = a_2$ et $AA'_2 = a'_2$ (*mesures algébriques*).
Monter que la courbe (l'Ovale de Descartes) est anallagmatique dans l'inversion (A, -60).
On appelle A''_1 le milieu de $A_1A'_1$, A''_2 le milieu de $A_2A'_2$ et A' le milieu de $A''_1A''_2$.
Monter que l'ensemble des poins A' est un cercle et que l'ensemble des points A''_1 et A''_2 est un limaçon de Pascal.

Envoyer les solutions et les propositions de problèmes à A. Viricel, 16 rue de la Petite Haye, 54600 VILLERS les NANCY.