

Didactique

LES ERREURS EN MATHÉMATIQUES ET LA CONCEPTION DE L'APPRENTISSAGE

Par Jacques VERDIER

Toute situation scolaire d'apprentissage met en relation 3 éléments :



Je vais essayer de décrire trois conceptions de la relation maître/élève/savoir, en m'appuyant sur deux articles, l'un de Michel MANTE [1], l'autre d'Alain BOUVIER [2].

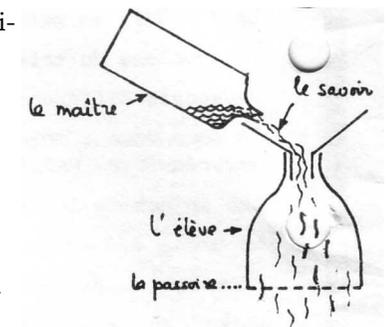
1. LA CONCEPTION "CLASSIQUE"

Le maître dispense un savoir nouveau (en souhaitant, le plus souvent, que les élèves soient "vierges" dans le domaine abordé ; les redoublants étant priés de faire comme si !!!). Le professeur enseigne, au sens où il apporte les connaissances, que l'élève reçoit.

Le "fonctionnement" de l'élève peut être décrit par ce schéma



G. GLAESER donne une version pessimiste de cette conception [3] :



Conséquences :

1. L'élève ne sait pas du tout où le professeur veut en venir.

2. L'élève fonctionne comme un "automath" [2], et produit un grand nombre d'erreurs, telles que :

$$(x - 1)(x - 2) > 0 \quad x - 1 > 0 \text{ ou } x - 2 > 0$$

$$\text{ou } \frac{5}{4} + \frac{7}{5} = \frac{12}{9}$$

3. L'élève applique des règles implicites, par exemple

- tout problème a une solution ;
- toutes les données de l'énoncé doivent être utilisées (et tout ce qui doit être utilisé est dans l'énoncé) ;
- l'élève repère des "mots-clés" dans l'énoncé pour connaître l'outil à utiliser (ex : le mot triangle rectangle induira l'utilisation du th. de Pythagore, etc.).

Ces règles sont révélées lorsque l'on place l'élève en situation inhabituelle (ex. : recherche sur problème ouvert).

4. Les erreurs des élèves sont synonymes d'échec

- échec de l'élève qui n'arrive pas à "faire juste"
- échec du professeur qui n'arrive pas à communiquer, à "faire passer" son savoir : "[considérer l'erreur] comme un parasite, un raté, un "malentendu qui ne vaut pas la peine qu'on s'y arrête, mais qui doit "être éliminé, et d'ailleurs disparaîtra de soi-même quand l'élève "aura compris." [4].

2. LA PÉDAGOGIE PAR OBJECTIFS

Le maître organise et planifie l'accès à un savoir clairement repéré et déterminé.

Le plus souvent, le savoir général est "découpé" en objectifs de savoir-faire, eux-mêmes redécoupés en sous-objectifs, qui sont opérationnalisés ; le schéma est une arborescence.

Exemple [5] TC 2 :

Le candidat doit être capable d'exécuter un calcul dans lequel les opérations sont données, ou la chaîne d'opérations programmée.

1. Calculer :

1.1. Écrire un nombre décimal positif (conditions : le nombre a au plus 8 chiffres, la partie décimale a au plus 3 chiffres ; il s'agit des passages lettres ↔ chiffres, l'une des deux écritures étant fournie).

1.2. Ordonner une liste de nombre décimaux positifs (conditions : ...)

1.3. Effectuer, sur des nombres décimaux positifs, une addition.

etc ...

« Formuler des objectifs pédagogiques consistera alors à repérer les capacités qu'est sensée promouvoir la formation, et sélectionner dans le corps des savoirs les contenus susceptibles d'assurer cette promotion. (...)

Reformuler l'activité de l'enseignant en termes d'objectifs pédagogiques opératoires, ce n'est pas jeter a priori l'anathème sur les méthodes expositives. Mais c'est réexaminer leur bien fondé en fonction des résultats que l'on escompte chez les apprenants, et non plus en fonction des impressions qu'en tire celui qui est chargé de l'exposé. »

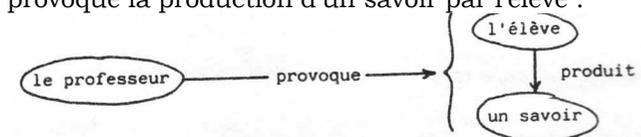
(D. Hameline [6]).

Conséquences :

1. On rencontre rarement, dans les référentiels, d'objectifs de haut niveau taxonomique, par exemple du niveau généralisation ou transfert (comme "réinvestir ses connaissances dans un domaine a priori éloigné" [7]).
2. Dans le cas où les objectifs sont communiqués à l'élève, celui-ci sait où il va. Il sait donc quand il est arrivé (même s'il n'est pas passé par le chemin prévu par le professeur). Y. Tourneur a bien montré en quoi cette communication des objectifs était un facteur positif de l'apprentissage [8].
3. Malheureusement, le plus souvent, l'élève n'est pas associé à la définition des objectifs, ni à l'élaboration des critères de réussite (on n'a donc pas une évaluation formative) ; on a affaire à une "P.P.O. de modèle impositif".

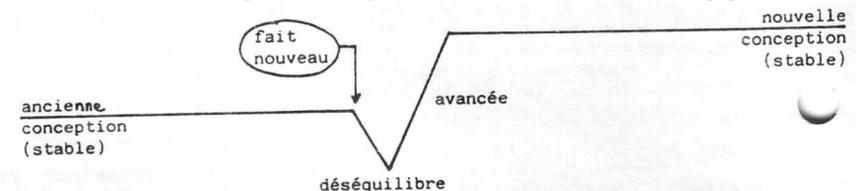
3. PÉDAGOGIE CENTRÉE SUR L'ÉLÈVE ET SUR L'ACTE D'APPRENTISSAGE :

Le maître provoque la production d'un savoir par l'élève :

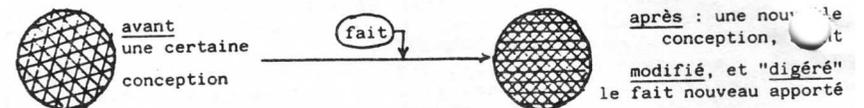


Cette conception s'est développée à partir des travaux des didacticiens (G. VERGNAUD, R. NEYRET à Grenoble, G. BROUSSEAU à Bordeaux), et s'appuie sur les travaux de PIAGET, de BACHELARD, etc.

On part d'une tête déjà pleine, avec une conception initiale "stable". L'apport d'un élément nouveau va provoquer un conflit, une rupture, une régression, voire une "catastrophe"... puis il y aura une avancée, suivie d'une nouvelle phase d'équilibre, suivant ce schéma [9] :



Le "fonctionnement" de l'élève peut se décrire ainsi :



Quel est alors le statut de l'erreur dans cette conception de l'apprentissage ? « L'erreur significative devient l'effet d'une connaissance antérieure qui avait son intérêt, ses succès, mais qui maintenant se révèle fautive et inadaptée. Ces erreurs résistent, survivent, et même parfois après que le sujet a rejeté le modèle défectueux de son système cognitif conscient. » (G. Brousseau [10]).

Par exemple $(a + b)^2 = a^2 + b^2$, qui montre la prégnance du modèle distributif $(a + b)c = ac + bc$.

Quelles situations devons-nous mettre en place pour que l'élève puisse ainsi acquérir des connaissances ?

D'abord, nous ne pouvons pas attendre que les "didacticiens professionnels" aient mis au point des séquences d'apprentissage pour modifier notre enseignement.

Ce qu'il faut, c'est partir des erreurs des élèves, et travailler en équipe (on pourrait, là-dessus, donner un rôle qui ne soit pas simplement formel au conseil d'enseignement) en essayant de répondre à ces quelques questions :

* quelle conception finale souhaitons nous que l'élève acquière ?

Exemples :

- pour la symétrie orthogonale, on peut souhaiter que l'élève de sixième en garde l'idée de pliage ;
- pour les décimaux, qu'il ait l'idée que c'est un ensemble dense dans Q ou dans R (il y a des décimaux partout).

Il faudra donc s'interroger sur :

- le rôle de la notion étudiée dans la vie courante, dans les autres sciences; l'utilité de cette notion (cf. [11]) ;
- le rôle de cette notion en mathématiques (s'appuyer sur une étude épistémologique est souhaitable).

* comment accéder aux conceptions initiales des élèves et aux représentations qu'ils se font des savoirs mathématiques ?

C'est un des domaines qu'explorent les psycho-pédagogues. Les erreurs des élèves peuvent nous aider à les percevoir.

- Par exemple « le nombre qui suit 2,3 est 2,4 » ou encore « $2,3 + 5 = 2,8$ » nous renseigne sur la conception qu'a l'élève du nombre décimal.

- Autre exemple, qui montre la conception que peut avoir l'élève de la symétrie orthogonale : Tracer le symétrique de F par rapport à la droite D donnera :



* quel est le rôle du professeur dans l'apprentissage ?

- il propose la situation ;
- au cours de la recherche, il ne valide ni n'infirme les hypothèses formulées : il donne cette responsabilité au petit groupe puis à la classe (cf. A.N. Perret-Clermont [12]) ; on retrouve là le rôle du professeur dans la gestion des problèmes ouverts (cf. [13]) ;
- il "officialise" certaines découvertes, ou propose des procédures que les élèves n'ont pas eu l'idée de les mettre en œuvre ;

- si la situation le permet, il peut dans certains cas apporter une aide individualisée pour répondre aux difficultés de certains élèves ;
- il donne des exercices d'application qui permettront de fixer les connaissances ;
- il organise l'évaluation et l'autocorrection (l'élève corrige son test soit seul, soit en groupe : cela aussi doit faire l'objet d'un apprentissage).

NB 1 . La régionale a invité Alain BOUVIER à nous faire travailler sur le rôle de l'erreur dans l'apprentissage en mathématiques (voir p. 16)

NB 2 . Nous proposons dans ce même numéro, page 13, un exemple de situation d'apprentissage centrée sur l'apprenant : activité liée à la proportionnalité.

Citations et bibliographie :

- [1] Michel MANTE (professeur au collège Jean Vilar de Villeurbanne et animateur IREM), "Des erreurs aux conceptions de l'apprentissage" in "Sans tambour ni trompette", bulletin IREM-APMEP de Lyon, n°27-37. juin 1985.
- [2] Alain BOUVIER (maitre-assistant en Math. à Lyon I, animateur IREN), "Ce que nous apprennent les erreurs de nos élèves", in Bulletin APREP n° 335, septembre 1982.
- [3] Georges GLAESER, Université de Strasbourg, Cours de 3^{ème} cycle de Didactique des Mathématiques, 1975.
- [4] Michel SANNER, "DU CONCEPT AU PHANTASME", P.U.F., 1983.
- [5] Ministère de l'Education, "Les unités du domaine D2. Référentiel de mathématiques", 1981.
- [6] Daniel HAMELINE, "Formuler des objectifs pédagogiques". in Cahiers Pédagogiques, n° 148-149, mai 1976.
- [7] Introduction au programme de mathématiques de la classe de seconde (B.O.)
- [8] Yvan TOURNEUR, "EFFETS DES OBJECTIFS DANS L'APPRENTISSAGE", Bruxelles, Ministère de l'Education Nationale et de la Culture, 1975.
- [9] Alain BOUVIER, in "Apprentissage et didactique", document IREM de n° 51, mai 1985.
- [10] Guy BROUSSEAU, "Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques", in Revue de Didactique Mathématique, n° 4-2, 1983.
- [11] Ghislain CREUTZ, "COMMENT DEFINIR DES OBJECTIFS VALIDES DANS L'ENSEIGNEMENT", CRDP de Liège.
- [12] Anne-Nelly PERRET-CLERMONT, "LA CONSTRUCTION DE L'INTELLIGENCE DANS L'INTERACTION SOCIALE". Peter Lang, Berne, 1979.
- [13] IREM de Lyon. "LA PRATIQUE DU PROBLEME OUVERT". 1985.