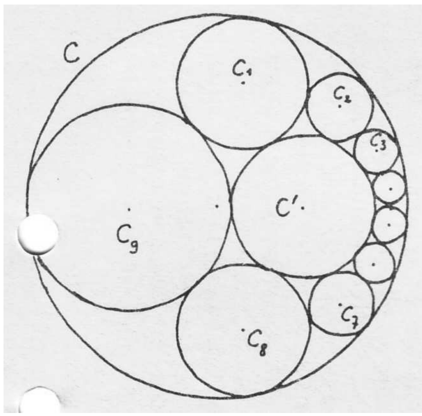
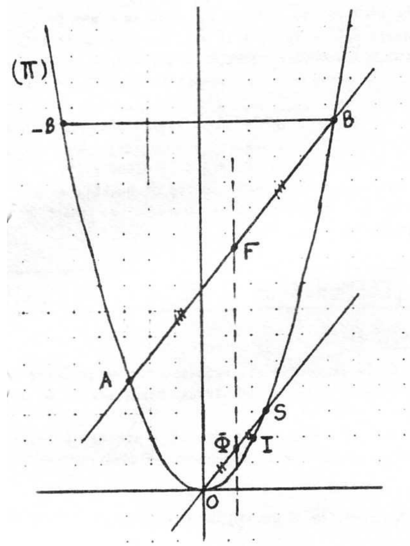
PROBLEME DU TRIMESTRE N°5

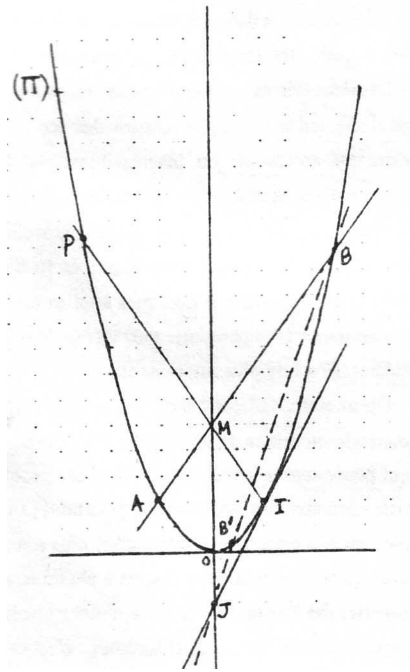


Soient deux cercles (C) et (C'), (C') appartenant à l'intérieur de (C). On trace (C_1), tangent intérieurement à (C) et extérieurement à (C'), puis un cercle (C_2) répondant aux mêmes conditions mais en plus tangent à (C_1), puis un cerc1e (C_3) distinct de (C_1) répondant aux mêmes conditions mais en plus tangent à (C_2), etc. Il peut arriver que la chaîne se reforme : (C_n) tangent à (C_1). Démontrer que, si cela est, cela se produit quelle que soit la position donnée initialement à (C_1).

Ce problème est proposé par André VIRICEL, 16 rue de la Petite Haye, 54600-VILLERS LES NANCY. Lui faire parvenir vous solutions.

Solution du problème précédent (proposé dans le n°4 page 5)





On prend comme repère la tangente au sommet et l'axe cette parabole Π, et comme unité l'abscisse du point I. Dans ce repère, l'équation de la parabole est $y = \alpha x^2$.

Soit φ l'application de **R** sur Π qui à tout réel *m* fait correspondre le point M de la parabole dont l'abscisse est *m*.

L'application φ est évidemment une bijection bicontinue. Il suffit donc de démontrer que $\varphi(a+b) = \varphi(a + \varphi(b)$ et que $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ pour que φ réalise un isomorphisme de (**R**, +, .) sur (Π, +, ·).

<u>Somme</u> : S est définie comme intersection de la parabole avec la parallèle à (AB) menée par O.

A a pour coordonnées (a ; αa^2) et B a pour coordonnées (b ; αb^2). Le coefficient directeur de la droite (AB) est donc $\alpha(a+b)$, et l'équation de la droite OS est $y = \alpha(a+b)x$. Cette droite recoupe la parabole d'équation $y = ax^2$ au point S d'abscisse $s = a+b$. C.Q.F.D.

Remarque : ceci est le cas général ; lorsque A = B, la droite (AB) est la tangente en A à Π, d'équation $y = 2\alpha a$, et l'on retrouve bien $s = 2a$.

<u>Produit</u> : La droite (AB) [ou, dans le cas particulier A = B, la tangente en A à Π] coupe l'axe de la parabole en M et la droite (IM) recoupe la parabole au point P cherché.

L'équation de (AB) est $y = \alpha(a+b)x - \alpha ab$. Les coordonnées de M sont (0 ; $-\alpha ab$).

L'équation de (IM) est $y = \alpha(ab+1)x - \alpha ab$. Les coordonnées ($p$, y_P) de P vérifient :

$$\begin{cases} y_P = \alpha(ab+1)p - \alpha ab \\ y_P = \alpha p^2 \end{cases}.$$

p vérifie donc l'équation $\alpha p^2 - \alpha(ab+1)p + \alpha ab = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = \alpha^2(ab-1)^2$, d'où les deux racines $\dfrac{\alpha(ab+1) \pm \alpha(ab-1)}{2\alpha}$, soit $p_1 = 1$ et $p_2 = ab$.

Dans le cas général, la solution recherchée est $p = ab$, car 1 correspond au point I. C.Q.F.D.

Cas particulier : lorsque $ab = 1$, il y a une racine « double », et la droite (IM) est la tangente en I à Π. Les points A et B sont alors « inverses » l'un de l'autre.

On a donc bien démontré que (Π, +, $\cdot$) est un corps commutatif.
L'élément neutre pour l'addition est le sommet O. L'opposé d'un point est son symétrique par rapport à l'axe de la parabole.
L'élément neutre pour la multiplication est le point I choisi au départ. Pour trouver « l'inverse » d'un point B, on trace la tangente en I qui coupe l'axe de la parabole en J ; l'intersection de (AJ) avec la parabole est le point B^{-1} cherché.
Résoudre $A\cdot X + B = 0$ revient donc à construire $X = (-B)\cdot A^{-1}$.
La solution est unique si A n'est pas l'origine O. Si A = O et B $\neq$ O, il n'y a pas de solution ; si A = B = O, tout point de la parabole Π est solution.

N.B. J'ai essayé de chercher une solution purement géométrique. Je ne suis arrivé à démontrer ainsi ni l'assocoativité de $\cdot$, ni la distributivité. Si quelqu'un pouvait fournir une telle solution entièrement géométrique, elle serait la bienvenue…

Jacques VERDIER