La calculette (suite)

Jacques VERDIER

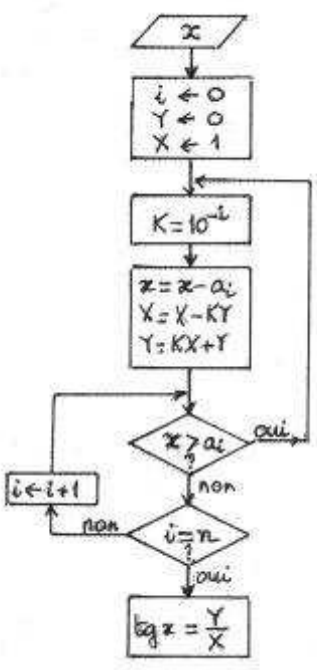
Pour calculer tan*x*, cos*x* ou sin*x*, comme pour calculer log*x* ou ln*x*, la calculette n'utilise pas les développements limités (leur convergence est beaucoup trop lente et ils sont très « coûteux » en opérations binaires).
La machine ramène le calcul de sin*x* et de cos*x* à celui de tan*x* par $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$ et $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$ pour tout $x \in \left[0\ ; \frac{\pi}{2}\right]$ (radians).
La machine a en mémoire morte π et $180/\pi$, ce qui permet de convertir les angles en radians et de ramener les calculs au premier quadrant.

Algorithme de calcul de tan*x*

Le processus consiste à soustraire à *x* un certain nombre de constantes a_i codées en ROM (mémoire morte) jusqu'à ce que la différence soit « presque » nulle. Ces constantes sont appelées ATR (Arc Tangent Radix) et valent :

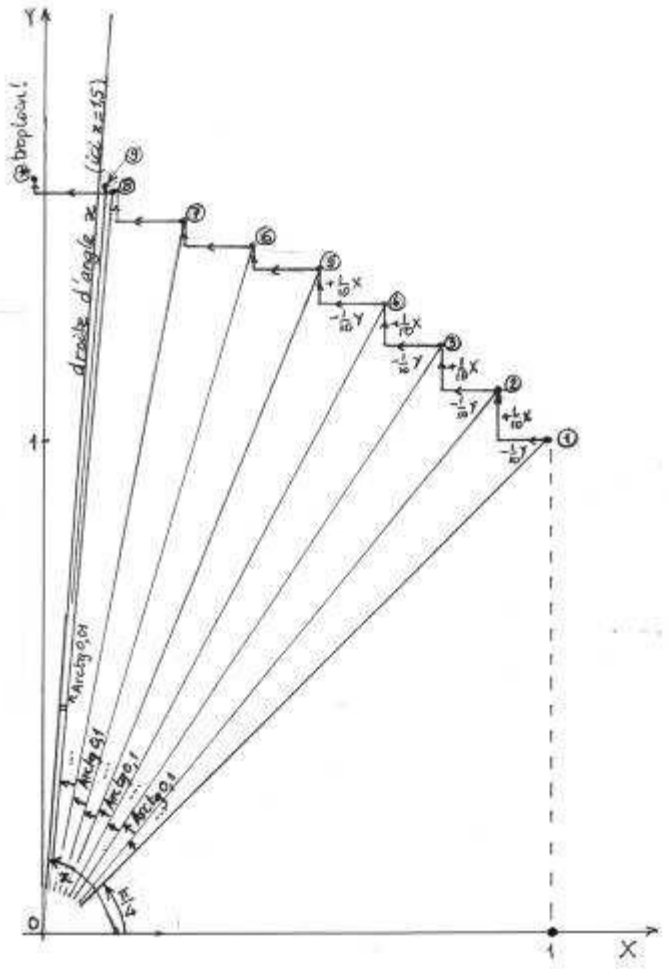
a_0 = Arctan $10^0 = \pi/4 = 7{,}853\ 981\ 633\ 974 \cdot 10^{-1}$
a_1 = Arctan $10^{-1} = 9{,}966\ 865\ 249\ 116 \cdot 10^{-2}$
a_2 = Arctan $10^{-2} = 9{,}999\ 666\ 686\ 665 \cdot 10^{-3}$
a_3 = Arctan $10^{-3} = 9{,}999\ 996\ 666\ 669 \cdot 10^{-4}$
a_4 = Arctan $10^{-4} = 9{,}999\ 999\ 966\ 667 \cdot 10^{-5}$

(une TI58 possède en mémoire a_0, a_1… a_4 codés en DCB chacun sur 8 octets).



Prenons par exemple *x* = 1,5 (radians)
On enlève une fois $\pi/4$, 7 fois Arctan(1/10), 1 fois Arctan(1/100), 6 fois Arctan(1/1000) et 9 fois Arctan(1/100000).
On trouve alors, avec l'algorithme, $Y/X \approx 14{,}101358$.
(voir schéma page suivante).
Comme pour le calcul de ln*x*, il y a une estimation de l'erreur sur ce résultat, et la machine affiche tan 1,5 = 14,401 419.

Démonstration de cet algorithme dans :
J. E. VOLDER, ***The C.O.R.D.I.C. trigonometric computing technique***, 1959, IEEE Transactions on Electronic Computers, vol. 8, pp. 330-334. (consultable à Paris au CNRS et au CNET).



Le point de départ est (X , $\underline{Y}$) = (1 , 0). On passe d'un point au suivant par

$$\begin{cases} X \leftarrow X - \dfrac{1}{10^i} Y \\ Y \leftarrow Y + \dfrac{1}{10^i} X \end{cases}$$

Il est facile de monter que l'angle duquel on a « tourné » est Arctan(10^{-i}), car :

$$\tan(u-v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 - \tan u \tan v} \text{ avec } \tan u = \frac{Y}{X} \text{ et } \tan v = \frac{Y + \dfrac{X}{10^i}}{X - \dfrac{Y}{10^i}}.$$