LE PROBLÈME DU TRIMESTRE

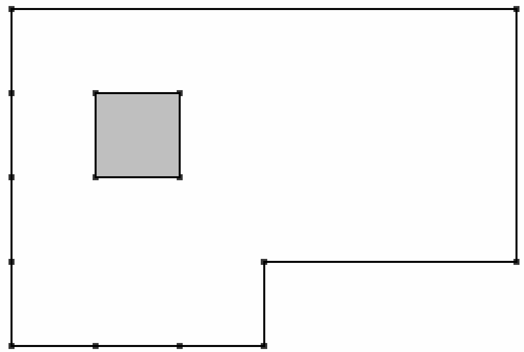
Proposé par André VIRICEL

1. Le tas de sable

Si une plate-forme horizontale, chargée à refus de sable, n'a que des bords rectilignes, le tas n'a que des surfaces planes dont l'angle avec le plan horizontal est toujours le même (cet angle dépend de la nature des grains de sable et de leur teneur en eau ; dans ce problème, on supposera qu'il vaut 45°).
La plate-forme a la forme de la figure ci-dessus : c'est un rectangle de 8 m sur 12 m, amputé d'un coin rectangulaire de 2 m sur 6 m, et percé d'un trou (figuré en gris) de 2 m sur 2 m.
Dessiner le tas de sable vu de dessus.
Calculer l'aire de sa surface extérieure.

2. La tondeuse à gazon

Ce même schéma représente maintenant une pelouse. Le jardinier qui doit la tondre veut suivre un trajet parallèle au bord le plus proche ; la partie grisée représente un massif, qu'on ne doit pas tondre. On indiquera sur ce schéma les lignes où le jardinier doit changer de direction.



Solution du problème paru dans le n°2 du Petit Vert

<u>Lemme</u> : a, b et c sont, dans le plan complexe, les affixes des sommets d'un triangle équilatéral de sens direct si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$, et de sens rétrograde si et seulement si $a + bj^2 + cj = 0$ [j étant une racine cubique complexe de l'unité].

Solution

Supposons le triangle (ABC) de sens rétrograde. Soient (BCA'), (CAB') et (ABC') les trois triangles équilatéraux. Ils sont tous les trois de même sens, direct. Les affixes des sommets de (BCA') vérifient donc $a' + bj + cj^2 = 0$, soit $a' = -bj - cj^2 = 0$.

, affixe du centre du triangle équilatéral (BCA'), vérifie

$$\alpha = \frac{1}{3}(a' + b + c),$$

soit $\alpha = \frac{1}{3}\left[b(1-j) + c(1-j^2) \right]$.

De même $\beta = \frac{1}{3}\left[c(1-j) + a(1-j^2) \right]$ et $\gamma = \frac{1}{3}\left[a(1-j) + b(1-j^2) \right]$.

Formons la combinaison $\alpha + \gamma j + \beta j^2$:

Le coefficient de a est $\frac{1}{3}\left[j(1-j) + j^2(1-j^2) \right] = 0$;

le coefficient de b est $\frac{1}{3}\left[(1-j) + j(1-j^2) \right] = 0$;

le coefficient de c est $\frac{1}{3}\left[(1-j^2) + j^2(1-j) \right] = 0$. D'où $\alpha + \gamma j + \beta j^2 = 0$.

<u>Conclusion</u> : le triangle défini par les centres des trois triangles équilatéraux est équilatéral, et de même sens que le triangle initial (ABC).

<u>Complément</u> :

On pourra montrer que les segments AA', BB' et CC' ont la même longueur, et que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes, ainsi que les droites (Aα), (Bβ) et (Cγ).

Cette solution nous a été proposée par ***VIRICEL****.*