

LA CALCULETTE : COMMENT CALCULE-T-ELLE ? (1)

Comment s'y prend la calculatrice pour calculer $\ln x$, $\log x$, e^x , etc. ?

Le développement en série $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ a une convergence beaucoup trop lente pour être utilisable (et de plus il utilise des opérations qui, pour la calculatrice, ne sont pas élémentaires : $\frac{x^n}{n} = x^{n-1} \cdot \frac{x}{n}$ utilise une multiplication et une division, opérations « lentes »).

Au contraire, les calculatrices utilisent à peu de choses près l'algorithme décrit par BRIGGS vers 1624 pour calculer (à la main !) les logarithmes de NEPER.

1. Décomposition d'un nombre en virgule flottante

Tout réel X peut s'écrire $X = x \cdot 10^n$ avec $1 \leq x < 10$ et n entier naturel.

C'est sous cette forme que la calculatrice « stocke » les nombres dans ses registres de calcul et ses mémoires.

On a alors $\ln X = \ln x + n \cdot \ln 10$.

Il suffit que la calculatrice connaisse $\ln 10$ et sache calculer $\ln x$ pour calculer $\ln X$.

En mémoire morte, elle a $\ln 10 = 2,302\ 585\ 092\ 994\ 012$

2. Calcul de $\ln x$ pour $1 \leq x < 10$

Considérons la suite $A_0 = 1 + 10^0 = 2$; $A_1 = 1 + 10^{-1} = 1,1$; $A_2 = 1 + 10^{-2} = 1,01$; $A_3 = 1 + 10^{-3} = 1,001$... $A_i = 1 + 10^{-i}$...

On peut facilement montrer que $(A)^{10} > A_{i-1}$: en effet, pour $u > 0$ et $n \geq 2$, on a $\ln(1+u)^n > 1+nu$.

D'autre part, $\lim_{i \rightarrow \infty} A_i = 1$ (évident).

Algorithme de calcul de $\ln x$:

- On multiplie x par A_0 autant de fois que c'est possible sans que le résultat dépasse 10 : soit n_0 le nombre de multiplications faites, et soit $x_0 = (A_0)^{n_0}$. On a donc $x_0 < 10$ et $x_0 \cdot A_0 \geq 10$.
- On multiplie x_0 par A_1 autant de fois que c'est possible sans que le résultat dépasse 10 : soit n_1 le nombre de multiplications faites, et soit $x_1 = (A_1)^{n_1}$, c'est-à-dire $x_1 = x \cdot (A_0)^{n_0} \cdot (A_1)^{n_1}$. On a donc $x_1 < 10$ et $x_1 \cdot A_1 \geq 10$.
- Et ainsi de suite...

Par exemple, pour $x = 3,5$:

$$3,5 \cdot 2^1 \cdot (1,1)^3 \cdot (1,01)^7 \cdot (1,001)^1 \cdot (1,0001)^0 \cdot (1,00001)^9 \cdot (1,000001)^2 \approx 10$$

Ces multiplications par A_i sont très rapides pour la calculatrice, car ce ne sont que des « décalages à gauche » et des additions.

Le lecteur pourra vérifier que :

- a) pour tout i , $n_i < 10$:
- b) $\lim_{\infty} x_i = 10$ (en utilisant le fait que $x_i < 10 \leq x_i \cdot A_i$).

On en déduit que $x \cdot \prod_0^{\infty} (A_i)^{n_i} = 10$, d'où $\boxed{\ln x = \ln 10 - \sum_0^{\infty} (n_i \cdot \ln A_i)}$

Où s'arrêter ?

La convergence de la série ci-dessus est très rapide : quelques dizaines de calculs permettent d'obtenir une précision de l'ordre de 10^{-10} .

- Les calculatrices TEXAS, par exemple, s'arrêtent à $i = 6$. Elles possèdent en mémoire morte (ROM) les valeurs suivantes :

$\ln 10 = 2,302\ 585\ 092\ 994\ 012$	 chacune de ces constantes est codée en DCB [décimal codé binaire] sur 8 octets, chaque chiffre occupant 8 bits.
$\ln A_0 = 0,693\ 147\ 180\ 559\ 945$	
$\ln A_1 = 0,095\ 310\ 179\ 804\ 325$	
$\ln A_2 = 0,009\ 950\ 330\ 853\ 168$	
$\ln A_3 = 0,000\ 999\ 500\ 333\ 084$	
$\ln A_4 = 0,000\ 099\ 995\ 000\ 333$	
$\ln A_5 = 0,000\ 009\ 999\ 950\ 000$	
$\ln A_6 = 0,000\ 000\ 999\ 999\ 500$	

- L'approximation est donc $\ln x \approx \ln 10 - \sum_0^6 (n_i \cdot \ln A_i)$, par excès. L'erreur

commise en prenant cette approximation est $\sum_7^{\infty} (n_i \cdot \ln A_i)$. Il a été démontré

qu'une bonne estimation de cette erreur était $\left(1 - \frac{x^6}{10}\right)$. D'où le calcul fait par la

touche de la calculatrice : $\boxed{\ln x = \ln 10 - \sum_0^6 (n_i \cdot \ln A_i) + \left(1 - \frac{x^6}{10}\right)}$

Par exemple, pour $x = 3,5$, ce calcul – fait « à la main » avec les valeurs des $\ln A_i$ ci-dessus – donne $\ln 3,5 = 1,252\ 762\ 968\ 590\ 119$. Une TI58 ou une Casio fx180P affiche : 1,252 732 968.

Par Jacques VERDIER (à suivre)

Bibliographie : J.E. VOLDER, The C.O.R.D.I.C. Trigonometric Computer Technic, 1959
J.M. SMITH, Méthodes numériques pour calculateur de poche, Eyrolles.
TEXAS INSTRUMENTS, Software Exchange Newsletter, vol. 2