

PROBLÈME 166 SUITE DE CARRÉS

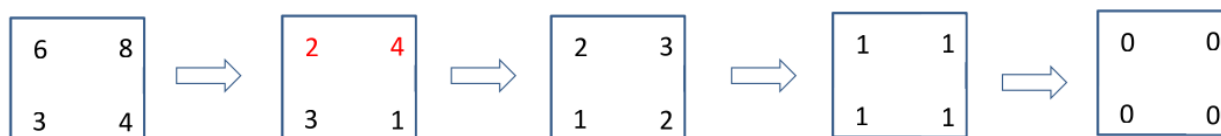
Proposé par Philippe FÉVOTTE

On place aux quatre coins d'un carré des nombres entiers positifs ; on construit une suite de carrés de la façon suivante :

On remplace chaque nombre par l'écart avec celui qui le suit, en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre.

Et on recommence tant que le résultat obtenu est différent du précédent.

Ainsi, dans l'exemple ci-dessous, dans le premier carré, l'écart entre 6 et 8 est 2 donc on remplace 6 par 2 ; l'écart entre 8 et 4 est 4, donc on remplace 8 par 4, ...



Le processus se termine-t-il toujours ?

Si oui, peut-on donner un majorant du nombre d'étapes ?

SOLUTION PROBLÈME 165

Proposée par Fabien Lombard

Rappel de l'énoncé de Jean Réveillon

On considère un ensemble D de N points du plan qui a la propriété suivante :

« Toute droite passant par deux points de D passe nécessairement par un autre point de D . »

Que peut-on dire de l'ensemble D ?

Solution

Le nom Jean Réveillon proposé est une boutade..., ce problème est un problème classique proposé en 1893 par Hans Sylvester ! Cela n'a pas échappé à Fabien Lombard qui a proposé une solution au problème et relevé la « supercherie ».

[Retour au sommaire](#)

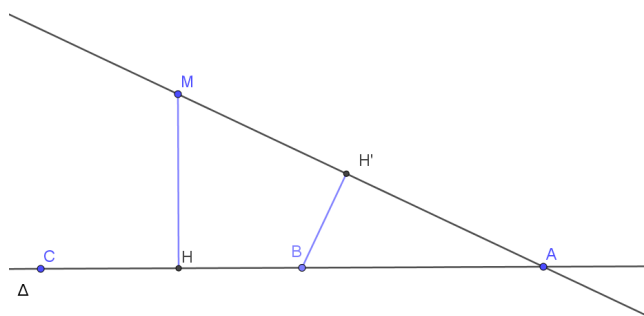
L'étude de quelques cas particuliers laisse penser que pour toute valeur de N , l'ensemble D est sur une droite.

Supposons que les points sont non alignés et considérons l'ensemble $\mathcal{B}$ des droites passant par des points de D .

A chaque droite Δ de $\mathcal{B}$, on peut associer un sous-ensemble de points de D qui n'est pas sur Δ . On définit ainsi un ensemble fini $\mathcal{H}$ de couples (Δ, M) , formés d'une droite de $\mathcal{B}$ et d'un point de D qui n'est pas sur Δ .

Parmi tous ces couples, en nombre fini, choisissons un de ceux pour lesquels la distance de M à Δ est minimale et on note H la projection de M sur Δ .

Par définition de D , la droite Δ contient au moins 3 points de D , que l'on note A , B et C , avec le critère suivant : A et B sont choisis du même côté (c'est toujours possible, car on choisit parmi 3) de H et tels que $HA > HB$. H' est le projeté orthogonal de B sur (AM) .



La droite (AM) appartient à $\mathcal{B}$ et B n'est pas un point de (AM) , donc $((AM), B)$ appartient à $\mathcal{H}$.

On vérifie aisément que $BH' < MH$, ce qui contredit que de tous les couples de $\mathcal{H}$ la distance MH soit minimale. L'ensemble $\mathcal{H}$ est donc vide et les points de D sont alignés.