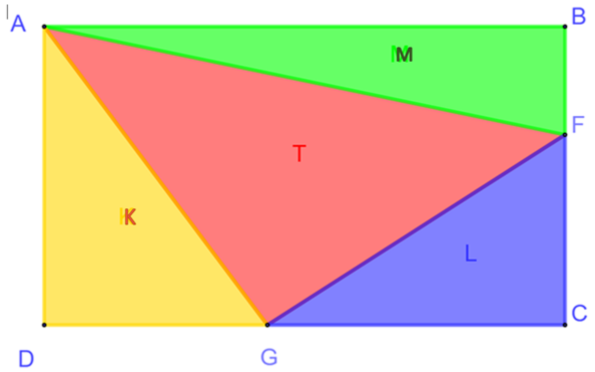
SOLUTION DÉFI 164 - 2
UNE HISTOIRE D'AIRES



ABCD est un rectangle. F est un point du segment [BC] et G est un point du segment [DC]. Montrer que $T = \sqrt{(M+K+L)^2 - 4MK}$?

Dans le repère (A, Ax, Ay), les différents points de la figure ont pour coordonnées :
$A(0;0)$; $B(b;0)$; $C(b;d)$; $D(0;d)$; $F(b;f)$ et $G(g;d)$ avec $0 < g < b$ et $0 < f < d$. **(I)**

$M = \frac{1}{2}bf$

$K = \frac{1}{2}dg$

$L = \frac{1}{2}(b-g)(d-f)$

⁕ $T = \text{Aire}(ABCD) - (M+K+L)$
$T = bd - (\frac{1}{2}bf + \frac{1}{2}dg + \frac{1}{2}(b-g)(d-f))$
$T = bd - \frac{1}{2}(bf + dg + bd - bf - gd + gf)$
$T = \frac{1}{2}(bd - gf)$ car (I) implique $0 < fg < bd$

⁕ $(M+K+L)^2 - 4MK = [\frac{1}{2}(bd+gf)]^2 - 4\frac{bdfg}{4}$
$(M+K+L)^2 - 4MK = \frac{1}{4}((bd+gf)^2 - 4bdfg)$
$(M+K+L)^2 - 4MK = (\frac{1}{2}(bd-gf))^2$.

On en déduit
$(M+K+L)^2 - 4MK = T^2$
ou encore
$T = \sqrt{(M+K+L)^2 - 4MK}$.

Si on observe bien on aurait de même
$T = \sqrt{(K+L+M)^2 - 4KL}$.

Retour au sommaire

PROBLÈME 165

Proposé par Jean Réveillon

On considère un ensemble D de N points du plan qui a la propriété suivante :
« Toute droite passant par deux points de D passe nécessairement par un autre point de D. »
Que peut-on dire de l'ensemble D ?

Le responsable de cette rubrique est Philippe Févotte.

Envoyez lui vos propositions de solutions à ce problème (nous espérons en avoir une grande quantité), ainsi que toute proposition de nouveau problème.

SOLUTION PROBLÈME 164
AU CHAUD !

proposé par Fabien Lombard

Rappel de l'énoncé

Un (grand) tiroir peut contenir des chaussettes rouges identiques et des chaussettes noires, également identiques. On est joueur et on souhaite, en tirant au hasard en une seule fois deux chaussettes de ce tiroir, que la probabilité d'obtenir deux chaussettes de la même couleur soit égale à $\frac{1}{2}$. Quelle composition du tiroir prévoir ? Dans le cas où le total T de chaussettes est inférieur ou égal à 2025 donner la composition pour T minimal et T maximal.

Solution

On note R le nombre de chaussettes rouges et N le nombre de chaussettes noires contenues dans le tiroir.

Les deux couleurs jouent un rôle symétrique, on peut donc, dans un premier temps, supposer pour les calculs que $R \geq N$.

La probabilité de tirer deux chaussettes de la même couleur est

$$\frac{\binom{R}{2} + \binom{N}{2}}{\binom{R+N}{2}} = \frac{\frac{R(R-1)+N(N-1)}{2}}{\frac{(R+N)(R+N-1)}{2}}$$

Donc $\dfrac{\binom{R}{2} + \binom{N}{2}}{\binom{R+N}{2}} = \dfrac{1}{2}$ équivaut à $\dfrac{R(R-1)+N(N-1)}{2} = \dfrac{(R+N)(R+N-1)}{4}$,

Retour au sommaire

soit $2(R^2+N^2-R-N)=R^2+N^2-R+2NR-N$,
soit $R^2+N^2-2NR=R+N$ et donc

$$(R-N)^2=R+N$$

On en déduit que $T=R+N$ est un carré que l'on va noter t^2
On a donc le système

$\begin{cases} R+N=t^2 \\ R-N=t \end{cases}$ On en déduit que $\begin{cases} R=\dfrac{1}{2}(t^2+t) \\ N=\dfrac{1}{2}(t^2-t) \end{cases}$

Inversement s'il existe un nombre naturel t tel que $R=\dfrac{1}{2}(t^2+t)$ et $N=\dfrac{1}{2}(t^2-t)$, alors

$$\frac{\binom{R}{2}+\binom{N}{2}}{\binom{R+N}{2}}=\frac{\dfrac{\frac{1}{2}(t^2+t)(\frac{1}{2}(t^2+t)-1)+\frac{1}{2}(t^2-t)(\frac{1}{2}(t^2-t)-1)}{2}}{\dfrac{t^2(t^2-1)}{2}}.$$

Soit $\dfrac{\binom{R}{2}+\binom{N}{2}}{\binom{R+N}{2}}=\dfrac{\frac{1}{2}(t^2+t)(\frac{1}{2}(t^2+t)-1)+\frac{1}{2}(t^2-t)(\frac{1}{2}(t^2-t)-1)}{t^2(t^2-1)}$.

$$\frac{\binom{R}{2}+\binom{N}{2}}{\binom{R+N}{2}}=\frac{\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{4}t^3-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{4}t^3+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{4}t^3-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{4}t^3-\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2}t}{t^2(t^2-1)}$$

Soit après simplification

$$\frac{\binom{R}{2}+\binom{N}{2}}{\binom{R+N}{2}}=\frac{\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2}{t^2(t^2-1)}=\frac{1}{2}$$

Par conséquent, pour répondre au problème, avec $R\geq N$, il faut et il suffit qu'il existe un nombre entier t tel que

$\begin{cases} R+N=t^2 \\ R-N=t^2 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} R=\frac{1}{2}(t^2+t) \\ N=\frac{1}{2}(t^2-t) \end{cases}$ ou $\begin{cases} R=\frac{1}{2}(t^2-t) \\ N=\frac{1}{2}(t^2+t) \end{cases}$

En conclusion la composition du tiroir vérifie les conditions :

- ◇ le total de chaussettes T est le carré d'un entier
- ◇ $|R-N|=\sqrt{T}$

Si $T\leq 2025$, le plus petit carré supérieur ou égal à 2 est 4, et la composition est (R,N)=(1,3) ou (3,1) ; et le plus grand carré est 2025, carré de 45, la composition est alors (R,N)=(995,1035) ou (1035,995).

Retour au sommaire