PROBLÈME 164
AU CHAUD !

Proposé par Fabien LOMBARD

Un (grand) tiroir peut contenir des chaussettes rouges identiques et des chaussettes noires, également identiques. On est joueur et on souhaite, en tirant au hasard, en une seule fois deux chaussettes de ce tiroir que la probabilité d'obtenir deux chaussettes de la même couleur soit égale à $\frac{1}{2}$.

Quelle composition du tiroir prévoir ?

Dans le cas où le total T de chaussettes est inférieur ou égal à 2025 donner la composition pour T minimal et T maximal.

Le responsable de cette rubrique est Philippe Févotte.

Envoyez lui vos propositions de solutions à ce problème (nous espérons en avoir une grande quantité), ainsi que toute proposition de nouveau problème.

SOLUTION PROBLÈME 163
ARCS CONCOURANTS

proposé par Fabien Lombard

Rappel de l'énoncé

On considère un triangle ABC ayant ses trois angles aigus et Γ son cercle circonscrit. On symétrise les trois arcs de Γ , $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ et $\overset{\frown}{CA}$ par rapport, respectivement, aux côtés (AB), (BC) et (CA) . Montrer que ces trois arcs obtenus par symétrisation sont concourants.

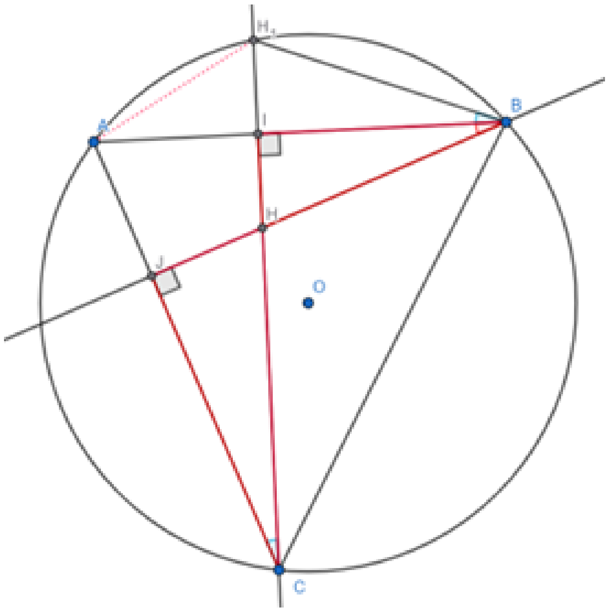
Deux solutions sont proposées par l'auteur de l'énoncé.

Solution 1

Dans cette première solution, on connait la propriété de l'orthocentre : « dans un triangle acutangle, les symétriques de l'orthocentre du triangle par rapport à chacun des côtés sont sur le cercle circonscrit au triangle. »

J'en rappelle rapidement la démonstration.

Retour au sommaire

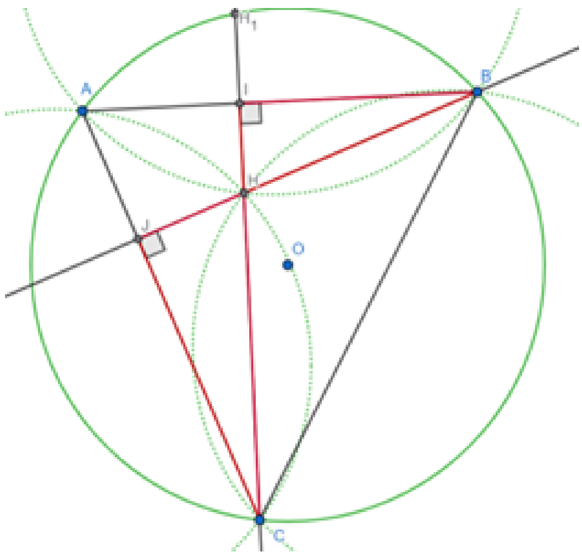


Étant donnés un cercle et deux points A et B de ce cercle, on appelle arc « mineur » défini par les points A et B, que je noterai $\langle AB\rangle$, l'arc de mesure inférieure au demi-cercle.

Si on note H_1, le point d'intersection de la hauteur (CH) avec l'arc « mineur » $\langle AB\rangle$, les angles $\widehat{ACH_1}$ et $\widehat{ABH_1}$ interceptent la même corde $[AH_1]$; ils ont donc la même mesure.
Dans les triangles rectangles HIB et HJC, les angles en H ont la même mesure, donc les angles $\widehat{ABH}$ et $\widehat{ACH_1}$ également.
Par conséquent les angles $\widehat{ABH_1}$ et $\widehat{ABH}$ ont la même mesure ; on en déduit que le point H_1 est le symétrique de H par rapport à (AB) ; d'où la propriété annoncée.

Par conséquent le symétrique par rapport à (AB) de l'arc défini par A, H_1 et B passe par les points A, H et B.

Ce résultat étant vrai pour chacun des côtés, cela démontre la concourance des trois arcs en H.

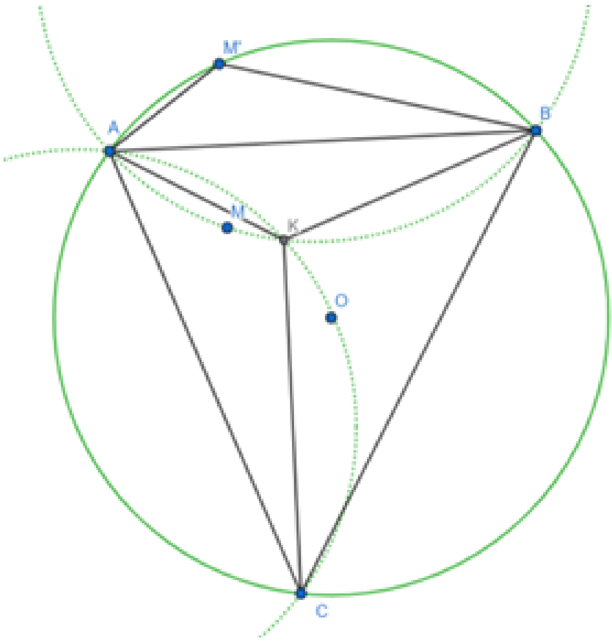


Solution 2

Dans cette seconde solution, on ne connait pas la propriété de l'orthocentre.

Retour au sommaire

On note K l'intersection des deux arcs symétriques des arcs mineurs $\langle AB\rangle$ et $\langle AC\rangle$ par rapport respectivement à (AB) et (AC).



Tout d'abord, montrons un lemme :

« On note $\mathcal{A}$ le symétrique de l'arc « mineur » $\langle AB\rangle$ par rapport à (AB). M appartient à $\mathcal{A}$ si et seulement si, modulo 2π, $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \pi - (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$. »

En effet, si M appartient à $\mathcal{A}$, son symétrique M' par rapport à (AB) vérifie, modulo 2π ,
$(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = -(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}) = (\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) = \pi - (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$.

Réciproquement, si $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \pi - (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$, alors son symétrique M' par rapport à (AB) vérifie, modulo 2π,
$(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) = -(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \pi - (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = \pi + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

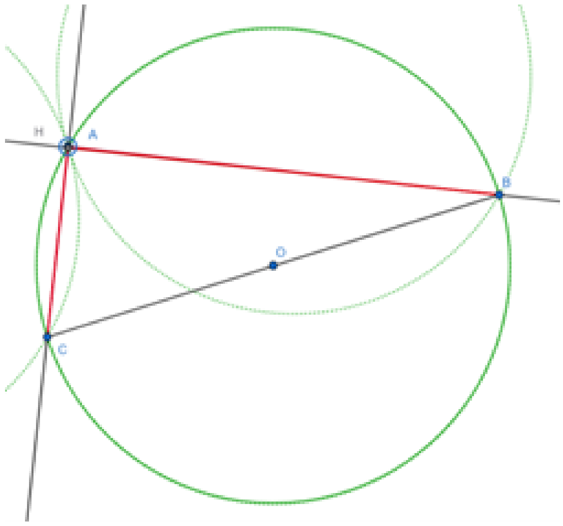
On en déduit que $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) = -(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ modulo π.
Les points A, B, C et M' sont donc cocycliques ; M' appartient à l'arc « mineur » $\langle AB\rangle$, par conséquent son symétrique M appartient à $\mathcal{A}$.

Or, modulo 2π, $(\overrightarrow{KC}, \overrightarrow{KB}) = -((\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KA}) + (\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KC}))$;
donc, modulo 2π, on a :
$(\overrightarrow{KC}, \overrightarrow{KB}) = -(\pi - (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) + \pi - (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \pi - (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$.

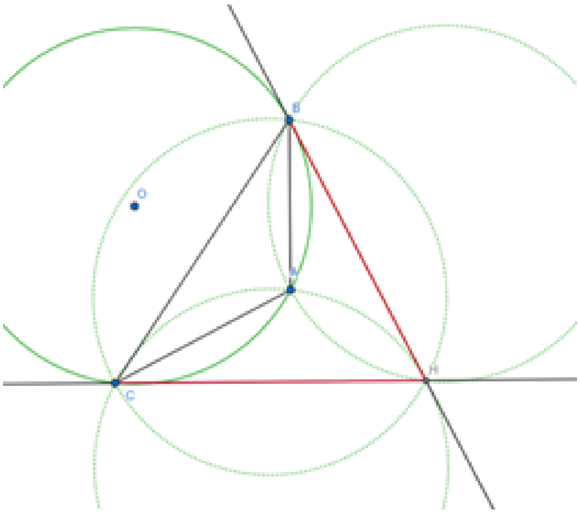
Donc, d'après le lemme, K est également sur le symétrique de l'arc mineur $\langle BC\rangle$, par rapport à (BC), et par conséquent, les trois arcs sont donc concourants.

Pour compléter, on peut illustrer ce qui se passe pour les cas particuliers d'un triangle rectangle ou obtusangle.

Retour au sommaire



Si le triangle est rectangle en A, le point H est en A.



Dans le cas d'un triangle obtusangle, H est extérieur au triangle, mais reste point de concourance des trois symétriques du cercle circonscrit, par rapport à chacun des côtés du triangle.

Retour au sommaire