PROBLÈME 163
ARCS CONCOURANTS

Proposé par Fabien LOMBARD

On considère un triangle ABC ayant ses trois angles aigus et Γ son cercle circonscrit. On symétrise les trois arcs de Γ , $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ et $\overset{\frown}{CA}$ par rapport, respectivement, aux côtés (AB), (BC) et (CA) . Montrer que ces trois arcs obtenus par symétrisation sont concourants.

SOLUTION PROBLÈME 162
UN NOMBRE IMPAIR DE LANCERS

Proposée par Philippe Févotte

Rappel de l'énoncé

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. On effectue des lancers successifs d'une pièce équilibrée jusqu'à obtenir k faces consécutives. Quelle est la probabilité que le nombre de lancers nécessaires soit impair ?

J'ai reçu une solution à ce problème de probabilités estival. Je présente d'abord celle de l'auteur, Jacques Choné, puis celle, plus générale, de Claude Morin ; je proposerai enfin une version différente, bien qu'assez proche de la seconde

Première solution (Jacques Choné)

Soit E l'événement étudié et p_k sa probabilité. Soit A_i pour i allant de 0 à $k-1$, les événements : « les lancers commencent par i "Face" suivi d'un "Pile" » et A_k l'événement « les lancers commencent par k "Face" ».

Le système des événements $(A_i)_{i=0\ \ k}$ est, par sa construction, un système complet d'événements ; par conséquent, en conditionnant l'événement E par les événements A_i, on obtient :

$$p_k = p(E) = \sum_{i=0}^{k-1} p(A_i)p_{A_i}(E) + p(A_k)p_{A_k}(E)$$

Le calcul de $p(A_0)p_{A_0}(E)$ est associé à l'événement où on a d'abord obtenu « P » et qu'on a gagné (soit un nombre impair de lancers) ; par conséquent on doit encore effectuer un nombre pair de

Retour au sommaire

lancers, ce qui correspond à « obtenir les k ” Face ” successives en un nombre pair de lancers ».
Par conséquent $\mathrm{p}\left(\mathrm{A}_0\right)\mathrm{p}_{\mathrm{A}_0}\left(\mathrm{E}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{p}\left(\mathrm{E}\right)\right)$

Par un raisonnement analogue, si le début des lancers est « FP », et qu'on a gagné, on aura effectué ensuite un nombre impair de lancers et alors $\mathrm{p}\left(\mathrm{A}_1\right)\mathrm{p}_{\mathrm{A}_1}\left(\mathrm{E}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\mathrm{p}\left(\mathrm{E}\right)$

Le même raisonnement va s'appliquer une fois sur deux. Ainsi,

Si k est impair :

$$\mathrm{p}_\mathrm{k} = \mathrm{p}(\mathrm{E}) = \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{p}\left(\mathrm{E}\right)\right) + \frac{1}{4}\mathrm{p}\left(\mathrm{E}\right) + \frac{1}{8}\left(1 - \mathrm{p}\left(\mathrm{E}\right)\right) + \frac{1}{16}\mathrm{p}\left(\mathrm{E}\right) + \ldots + \frac{1}{2^\mathrm{k}}\left(1 - \mathrm{p}\left(\mathrm{E}\right)\right) + \frac{1}{2^\mathrm{k}} \times 1$$

Si k est pair :

$$\mathrm{p}_\mathrm{k} = \mathrm{p}(\mathrm{E}) = \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{p}\left(\mathrm{E}\right)\right) + \frac{1}{4}\mathrm{p}\left(\mathrm{E}\right) + \frac{1}{8}\left(1 - \mathrm{p}\left(\mathrm{E}\right)\right) + \frac{1}{16}\mathrm{p}\left(\mathrm{E}\right) + \ldots + \frac{1}{2^\mathrm{k}}\mathrm{p}\left(\mathrm{E}\right) + \frac{1}{2^\mathrm{k}} \times 0$$

On en déduit que :

Dans le cas où k est impair :

$$\mathrm{p}\left(\mathrm{E}\right)\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^\mathrm{k}}\right) = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^\mathrm{k}} + \frac{1}{2^\mathrm{k}}\right)$$

Par conséquent, en notant $\mathrm{k} = 2\mathrm{p} + 1$

$$\mathrm{p}\left(\mathrm{E}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^{2\mathrm{p}+1}}{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)}\right) = \left(\frac{1}{2}\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2\mathrm{p}+2}}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{1}{2^{2\mathrm{p}+1}}\right)$$

Après simplification, on obtient $\mathrm{p}(\mathrm{E})\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{6}\frac{1}{2^{2\mathrm{p}}}\right)\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{2^{2\mathrm{p}}}\right)$ ou encore $\mathrm{p}\left(\mathrm{E}\right) = \frac{2 + 2^{2\mathrm{p}+2}}{1 + 2^{2\mathrm{p}+3}}$

Ou encore, dans le cas où k est impair, $\mathrm{p}\left(\mathrm{E}\right) = \frac{2 + 2^{\mathrm{k}+1}}{1 + 2^{\mathrm{k}+2}}$

Dans le cas k est pair, des calculs analogues donnent $\mathrm{p}\left(\mathrm{E}\right) = \frac{-2 + 2^{\mathrm{k}+1}}{-1 + 2^{\mathrm{k}+2}}$

Ce qui permet de donner comme écriture unique :

$$\mathrm{p}\left(\mathrm{E}\right) = \frac{2\left(-1\right)^{\mathrm{k}+1} + 2^{\mathrm{k}+1}}{\left(-1\right)^{\mathrm{k}+1} + 2^{\mathrm{k}+2}}$$

Pour compléter cette correction, Jacques Choné a proposé un programme écrit en Python qui fournit une estimation de la probabilité recherchée :

```
""" ce programme simule la probabilité d obtenir k Face successivement
en un nombre impair de lancers

La fonction expk() définit une expérience jusqu'à l'obtention
d'une succession de k Face

La fonction estk() donne une estimation de la probabilité recherchée"""
```

Retour au sommaire

```
from random import *

def expk(k) : # 0 représente obtenir Face
    a = [randint(0,1) for i in range(k)]
    c = k
    while a!=[0 for i in range(k)] :
        a = [a[i] for i in range(1,k)]+[randint(0,1)]
        c = c+1
    if c%2 != 0 :
        return(1)
    else :
        return(0)
def estk(n,k) :
    return(sum(expk(k) for i in range(n))/n)
```

Ainsi :

`estk(10**6.3)` renvoie `0.5454` pour une valeur réelle $\dfrac{6}{11} = 0,545454...54$

`estk(10**5.2)` donne `0.39859` pour une valeur réelle 0,4

Par ailleurs, il propose un lien pour une étude dans le cas $k = 2$, par plusieurs méthodes, l'une d'elles faisant apparaitre les nombres de Fibonacci !

Deuxième solution (Claude Morin)

Claude Morin propose d'étudier le problème dans un cas plus général. Cette solution fait intervenir une série proche de la fonction génératrice d'une variable aléatoire.

Comme nous le verrons en fin d'article, cette étude revient à considérer une pièce non équilibrée.

Généralisons un peu en faisant des tirages équiprobables dans $[\![1, N]\!]$ et en considérant la variable X_k égale au nombre de tirages pour obtenir pour la première fois k fois le 1 consécutivement (il suffira de poser $N = 2$ pour retrouver le problème initial).

1) Soit u_n le nombre de suites de longueur n formées d'entiers dans $[\![1, N]\!]$ et telles qu'il n'y ait jamais k fois le 1 consécutivement.

Pour $1 \leq n \leq k - 1$ on a $u_n = N^n$ et $u_k = N^k - 1$.

Il existe une formule de récurrence : $u_n = (N - 1)(u_{n-1} + u_{n-2} + ... + u_{n-k})$ car si la suite de longueur n débute par $j - 1$ fois le 1 suivis d'un chiffre différent de 1 (avec $1 \leq j \leq k$) alors il y a $(N - 1)\,u_{n-j}$ façons de compléter les 1.

On posera $u_0 = 1$ pour que la récurrence soit valable à partir de $n = k$.

De cette récurrence on déduit une autre récurrence plus simple en retranchant l'égalité pour n à celle pour $n + 1$: $u_{n+1} = Nu_n - (N - 1)\,u_{n-k}$ (valable pour $n \geq k$).

Retour au sommaire

2) On a $P(X_k = n) = 0$ si $n \leq k-1$, $P(X_k = k) = \dfrac{1}{N^k}$ et $P(X_k = n) = \dfrac{(N-1)\,u_{n-k-1}}{N^n}$ pour $n \leq k+1$ (puisque $(X_k = n)$ signifie qu'on a une suite de longueur $n-k-1$ sans k fois le 1 consécutivement, suivie par un chiffre différent de 1 et terminée par k fois le 1).

3) Posons $G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_k = n)(Nt)^n = t^k + \sum_{n=k+1}^{\infty} (N-1)\,u_{n-k-1} t^n$.

Cette fonction est de manière évidente définie sur un intervalle I contenant $\left[\dfrac{-1}{N}, \dfrac{1}{N}\right]$

Comme l'équation caractéristique de la deuxième récurrence est $x^{k+1} - Nx^k + (N-1) = 0$ nous allons calculer $\left(1 - Nt + (N-1)\,t^{k+1}\right) G(t)$:

$$\left(1 - Nt + (N-1)\,t^{k+1}\right) t^k + (N-1)\left(\sum_{n=k+1}^{\infty} u_{n-k-1} t^n - N \sum_{n=k+2}^{\infty} u_{n-k-2} t^n + (N-1) \sum_{n=2k+2}^{\infty} u_{n-2k-2} t^n\right)$$

après avoir fait les changements d'indices $n' = n+1$ et $n' = n+k+1$ dans les deux dernières sommes.

On obtient ensuite :

$$\left(1 - Nt + (N-1)\,t^{k+1}\right) t^k + (N-1)\,u_0 t^{k+1} + (N-1) \sum_{n=k+2}^{2k+1} \left(u_{n-k-1} - Nu_{n-k-2}\right) t^n$$

puisqu'on a $\sum_{n=2k+2}^{\infty} \left(u_{n-k-1} - Nu_{n-k-2} + (N-1)\,u_{n-2k-2}\right) t^n = 0$ (par la relation de récurrence).

En utilisant $u_n = N^n$ pour $0 \leq n \leq k-1$ et $u_k = N^k - 1$ on simplifie en :

$$t^k - Nt^{k+1} + (N-1)\,t^{2k+1} + (N-1)\,t^{k+1} + (N-1) \sum_{n=k+2}^{2k+1} \left(N^{n-k-1} - N^{n-k-1}\right) t^n - (N-1)\,t^{2k+1}$$

D'où l'on tire enfin : $G(t) = \dfrac{t^k(1-t)}{1 - Nt + (N-1)\,t^{k+1}}$.

4) La probabilité que X_k soit impair est égale à :

$$P(X_k = 1) + P(X_k = 3) + \ldots = \frac{1}{2}\left(G\left(\frac{1}{N}\right) - G\left(-\frac{1}{N}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\left(\frac{-1}{N}\right)^k \left(1 + \frac{1}{N}\right)}{2 + (N-1)\left(-\frac{1}{N}\right)^{k+1}}\right)$$

qui se simplifie en $\dfrac{N^{k+1} + N(-1)^{k+1}}{2N^{k+1} + (N-1)(-1)^{k+1}}$

Dans le cas $N = 2$ on obtient $\dfrac{2^{k+1} + 2(-1)^{k+1}}{2^{k+2} + (-1)^{k+1}}$.

4) Une variante de cet exercice considère la variable Y_k égale au nombre de tirages pour obtenir pour la première fois k chiffres consécutifs égaux. L'étude est analogue et on peut montrer

Retour au sommaire

que la loi de Y_k est la même que celle de $X_{k-1}+1$. La probabilité que Y_k soit impair est alors égale à la probabilité que X_{k-1} soit pair, c'est-à-dire : $\dfrac{N^k-(-1)^k}{2N^k+(N-1)(-1)^k}$

On peut aussi calculer les espérances : $E(X_k)=N+N^2+\ldots+N^k$ et $E(Y_k)=1+N+\ldots+N^{k-1}$. On a donc $E(X_k)=NE(Y_k)$ ce qui est raisonnable !

Troisième solution

Dans cette solution, on retrouvera des arguments assez proches de la solution précédente, mais sans pour autant utiliser de fonction génératrice.

On va essayer de déterminer la loi de probabilité du « temps d'attente » avant l'obtention de la première série de k « Face » consécutifs ; on note T_k cette variable aléatoire et $p_n=P(T_k=n)$ pour les valeurs de $n\geq 1$.

De manière évidente, pour $n\leq k-1$, on a $p_n=0$ et $p_k=P(T_k=k)=\left(\frac{1}{2}\right)^k$

On introduit l'événement : « il n'y a pas eu de lancers de k « faces » consécutifs dans les n premiers lancers ».

Ainsi pour tout $n\geq 1$, l'événement « obtenir la première série de k « Face » consécutifs au rang $k+n+1$ » est la conjonction des événements indépendants :

- Ne pas obtenir de série de k « Face » consécutifs dans les n premiers lancers
- Le lancer de rang $n+1$ donne « Pile »
- Les k lancers suivants donnent « Face »

Le contraire de « ne pas obtenir de série de k " Face " consécutifs dans les n premiers lancers » est obtenir une série au temps 1, ou au temps 2,.... Et par conséquent la probabilité de « ne pas obtenir de série de k « Face » consécutifs dans les n premiers lancers » est égale à $1-\sum_{i=1}^{n}p_i$

On en déduit que $p_{k+n+1}=\left(1-\sum_{i=1}^{n}p_i\right)\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$.

Cette relation ne permet pas de donner simplement une forme explicite de p_n, mais on peut remarquer qu'on peut obtenir, comme dans la solution précédente, une relation de récurrence plus simple.

En effet, $p_{k+n+1}=\left(1-\sum_{i=1}^{n}p_i\right)\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k=\left(1-\sum_{i=1}^{n-1}p_i\right)\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1}p_n$, soit :

$$p_{k+n+1}=p_{k+n}-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}p_n$$

Cette forme va être suffisante pour répondre à la question posée.

En effet la probabilité cherchée est $S=p_1+p_3+p_5+\ldots=\sum_{n,\text{entier impair}}p_n$

Prenons le cas où k est impair.

Pour $n=1$, on obtient $p_{k+2}=p_{k+1}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1}p_1$

Pour $n=3$, on obtient $p_{k+4}=p_{k+3}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1}p_3$

Retour au sommaire

Etc…

Par sommation on a alors $S - p_k = (1 - S) - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} S$; et par conséquent après calcul, on retrouve bien $S = \frac{2^{k+1}+2}{2^{k+2}+1}$

De même dans le cas k pair, on retrouve bien le résultat attendu.

Même si cela ne fait pas partie de l'exercice proposé, on peut remarquer que cette solution permet de déterminer l'espérance de la variable T_k

En effet on sait que $E\left(T_k\right) = \sum_{n\geq 0} p_n \times n = \sum_{n\geq 0} p(T_k > n)$

Pour le démontrer il suffit de remarquer que $p\left(T_k > i\right) = p\left(T_k = i+1\right) + p\left(T_k = i+2\right) + \ldots$

La sommation de ces termes fait apparaitre pour chaque valeur de i , i fois le terme $p\left(T_k = i\right)$, ce qui donne la formule indiquée.

Or pour $n \geq 1$, $(T_k > n)$ est l'événement « il n'y a pas eu de lancers de k " Face " consécutifs dans les n premiers tirages » dont la probabilité est $1 - \sum_{i=1}^{n} p_i = p_{k+n+1} \times 2^{k+1}$; et bien sûr $p\left(T_k > 0\right) = 1$.

Par conséquent, $E\left(T_k\right) = 1 + \sum_{n\geq 1} p_{k+n+1} \times 2^{k+1} = 1 + 2^{k+1} \sum_{n\geq 1} p_{k+n+1} = 1 + 2^{k+1} \sum_{n\geq k+2} p_n$

Sachant que pour tout $i < k$, $p_k = 0$, on en déduit que $1 = p_k + p_{k+1} + \sum_{n\geq k+2} p_n$.

Comme $p_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ et $p_{k+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$, on en déduit que

$$E\left(T_k\right) = 1 + 2^{k+1}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right) = 2^{k+1} - 2$$

On peut remarquer que $E\left(T_k\right) = 2\left(2^k - 1\right) = 2\left(1 + 2 + \ldots + 2^{k-1}\right)$, c'est-à-dire $E\left(T_k\right) = 2 + \ldots + 2^k$. Ainsi, augmenter k de 1 ajoute une puissance de 2 au nombre moyen de lancers nécessaires pour obtenir une série de k « Face » consécutifs.

On retrouve bien le résultat obtenu dans la deuxième solution dans le cas $N = 2$.

Dans le cas plus général où la pièce n'est pas équilibrée, avec p la probabilité d'obtenir « Face », on peut reprendre l'exercice et sans grande modification, on obtient $E\left(T_k\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} \ldots + \frac{1}{p^k}$, résultat déjà indiqué dans la seconde solution.

Retour au sommaire