ÉTUDE MATHÉMATIQUE

SOURIEZ, VOUS ÊTES OBSERVÉS !

André STEF

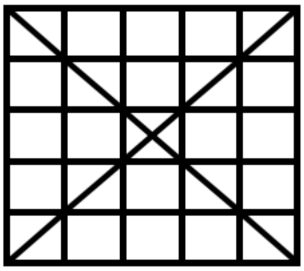
OU : Encore une fois un ou des profs, incluant l'auteur de l'article, se sont « plantés » en donnant un exo dont ils n'ont pas étudié suffisamment la réponse.

NB : Au moment où je reprends cet exercice, le thème de la caméra-surveillance revient dans l'actualité (juillet 2025), contextualiser des problèmes de maths n'est pas sans risques.

Un exercice du Rallye 2025

Exercice 2 : Souriez, vous êtes observés

En stage à San Michael, le commissaire Girard doit gérer l'installation de caméras de surveillance dans un quartier fréquenté par des trafiquants. Chaque caméra va surveiller en permanence l'ensemble des rues qu'elle peut voir (horizontales, verticales ou en obliques). Le commissaire n'a que six caméras. Où devra-t-il les placer ? De combien de façons différentes peut-il les placer ? On donnera un placement possible, en indiquant par un cercle sur la grille réponse, la position des six caméras



Les participants (équipe d'élèves de Troisième ou de Seconde) ont généralement fourni un placement possible. Mais la question du nombre de façons différentes a été très peu abordée et les quelques réponses sont en fait très éloignées des valeurs numériques qui apparaitront dans cet article. Mais on pourra constater que ce n'est pas étonnant.

Première réponse sur le nombre de façons de placer les caméras.

La réponse à cet exercice est de fait bien plus difficile que pensée initialement par les organisateurs du rallye et elle a engendré plusieurs échanges entre les membres du comité régional.

Une première réponse fournie, en interne du comité, correspond au modèle suivant :

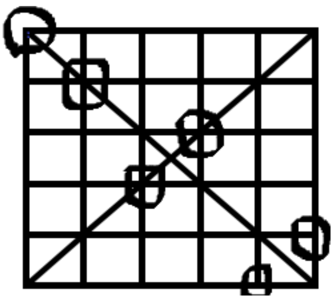
Retour au sommaire

1) On choisit la rue « horizontale » (ou ligne) où la caméra sera sur la diagonale descendante, ainsi l'emplacement de la caméra à l'intersection de 3 rues, la diagonale « descendante », une rue « horizontale » et celle « verticale » (colonne). Il y a 6 possibilités de choix.
2) On choisit alors la rue « horizontale » (ou ligne) où la caméra sera sur la diagonale « ascendante », ainsi l'emplacement de la caméra à l'intersection de 3 rues, la diagonale « ascendante », une rue « horizontale » (autre que celle déjà choisie) et la « verticale » (qui devra être différente de celle déjà suivie par la première caméra). Il y a 4 possibilités de choix, car ne peut pas être choisie la première ligne (1), ni celle où le point d'intersection avec la diagonale « descendante » serait sur la même rue « verticale » que celle de la première caméra.
3) Il nous reste alors à placer les 4 caméras sur les 4 rues horizontales, en imposant les intersections sur les 4 rues verticales restantes. On place par exemple les caméras dans l'ordre (descendant) des rues horizontales restantes. Ce qui fournit 4 ! = 24 possibilités (l'expression « par exemple » sert à se donner une manière de générer les possibilités, sans redondances).

   Conclusion : le nombre de possibilités est donc $6 \times 4 \times 24 = 576$ possibilités. Réponse acceptée et validée par le groupe Rallye, dans un premier temps. Valeur retenue pour la correction du rallye

Validation ou non après coup ?

Comme dans beaucoup de problèmes de dénombrement, la question *a posteriori* « ai-je bien géré le fait qu'il y a, ou pas, un ordre ? » fait s'écrouler régulièrement des raisonnements qu'on jugeait infaillibles. C'est le cas ici, car des placements des 6 caméras peuvent être dénombrés plusieurs fois dans le dénombrement précédent. En effet, ce sera le cas des placements avec plus (sens strict) de 2 caméras sur les diagonales. C'est par exemple le cas ci-dessous :



Ces placements peuvent être obtenus à partir de 4 constructions précisées précédemment :

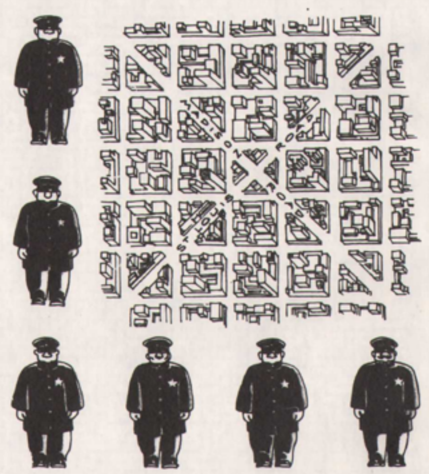
- **1)** ligne 1, **2)** ligne 3, **3)** les 4 autres lignes (2 puis 4 puis 5 puis 6)
- **1)** ligne 2, **2)** ligne 3, **3)** les 4 autres lignes (1 puis 4 puis 5 puis 6)
- **1)** ligne 1, **2)** ligne 4, **3)** les 4 autres lignes (2 puis 3 puis 5 puis 6)
- **1)** ligne 2, **2)** ligne 4, **3)** les 4 autres lignes (1 puis 3 puis 5 puis 6)

Nous pouvons donc désormais seulement affirmer que le nombre de façons différentes de placer les 6 caméras **est inférieur** (et même au sens strict) **à 576**.

Retour au sommaire

Retour à la source

Cet exercice est extrait de la défunte revue **Jeux et Stratégie** (publication de 1980 à 1990), mine de jeux et d'articles, dont quelques collègues sont certainement nostalgiques (y compris l'auteur de cet article).

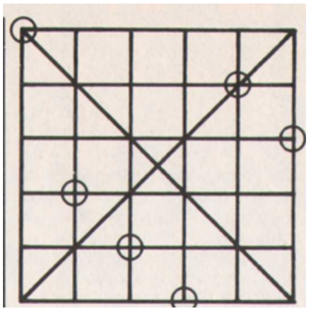


THE LOOP

Le centre de la ville, the Loop, tire son nom du chemin de fer qui l'entoure. C'est le quartier des affaires et des magasins, dont voici le plan schématique.
Six policiers sont chargés de surveiller en permanence toutes les rues (horizontales), avenues (verticales) et routes (diagonales). Chacun d'eux surveille la totalité de la longueur du chemin qu'il peut voir. Où faut-il placer les six policiers? De combien de façons différentes peut-on les placer?

L'énoncé a été légèrement modifié pour le rallye, mais la question semble bien la même.
Une solution est fournie (à la fin de la revue) :

The Loop :
Voici une manière de placer les six policiers, de façon à surveiller toutes les rues, avenues, routes du quartier (schéma suivant).
- sur Madison Road, un policier peut être placé à 6 carrefours différents;



- sur St-Louis Road, un policier à 4 carrefours différents;
- sur les 2 rues n'ayant que deux carrefours encore libres, deux policiers (2 façons différentes et non 4, car il s'agit de carrefours sur les mêmes avenues);
- sur les deux dernières rues qui n'ont plus elles-mêmes que 2 carrefours libres chacune, deux policiers (2 façons différentes).

Le nombre de solutions possibles est donc : $6 \times 4 \times 2 \times 2 = 96$.

Il convient de comprendre ainsi cette construction, avec support de l'exemple ci-dessus) :

1) comme la construction précédente (ici on choisit ligne 1). Il y a 6 possibilités.

2) comme la construction précédente (ici on choisit la ligne 2). Il y a 4 possibilités.

3) deux lignes exactement ont exactement deux carrefours libres, c'est-à-dire utilisables car n'y passe pas de diagonale ni de colonne déjà surveillée. Ce point n'est pas démontré dans la revue. Comprendre que, sur chaque ligne, les diagonales bloquent deux colonnes systématiquement et que les colonnes bloquées ne sont pas les mêmes suivant les lignes et

Retour au sommaire

que, ainsi, deux lignes ont alors 4 carrefours bloqués : ce sont les lignes pour lesquelles les diagonales ne bloquent pas les mêmes colonnes que celles bloquées par les 2 policiers déjà placés en 1) et 2). (Ici ce sont donc les lignes 3 et 4.). Il y a deux possibilités de placement des deux policiers (le placement de l'un impose la place de l'autre).

4) sur les deux lignes restantes (ici lignes 5 et 6) on place les deux derniers policiers (l'un placé impose la place de l'autre). Il y a 2 possibilités.

Ainsi il y a $6 \times 4 \times 2 \times 2 = 96$ possibilités

Cependant cette construction ne crée que des placements où il y a exactement un et un seul policier sur chaque route diagonale. Ce n'est pas explicitement précisé par l'énoncé, et on peut donc rester insatisfait de cette réponse. On pourra avec bienveillance considérer qu'il y a une erreur d'énoncé dans le magazine (au lecteur d'excuser ou non l'erreur de l'équipe de rédaction du rallye de l'APMEP).

Mais alors ?

La solution au problème posé est donc comprise entre 96 et 576 (et même inférieure ou égale à 573, compte tenu de la remarque sur la configuration comptée 4 fois, et qui n'est bien sûr pas la seule).

Quelle est alors la réponse à la question ?

Tout d'abord, j'admets que je ne parviens pas à décomposer ce problème de dénombrement en sous problèmes, c'est-à-dire à créer une partition de l'ensemble des configurations possibles en des sous-ensembles qu'on puisse dénombrer assez facilement. **Appel est donc lancé aux adhérents pour traiter de manière élégante ce problème.**

La réponse à l'exercice

Cette partie va fournir la réponse à la question. Et ne supprime pas l'appel aux adhérents à répondre. La « subtilité » est bien que c'est un appel à un traitement élégant. Et je ne me résous pas à considérer le traitement suivant comme élégant. Par contre, j'ai passé depuis longtemps le cap et je considère que c'est bien une résolution pertinente de l'exercice.

Comme dans d'autres (tous) problèmes, il convient d'accepter la méthode de recherche exhaustive de toutes les configurations. Pour cet exercice, on peut se mettre d'accord que le nombre de configurations à tester est de $6^6 = 46656$, à raison du placement de chaque policier/caméra sur 6 lignes (et ainsi 6 places possibles pour chacun), qu'on peut améliorer en $6! = 720$ tests (permutations de 6 policiers/caméras sur les colonnes, chacun étant sur une ligne différente). Il s'agit alors de vérifier si chaque configuration testée répond à la contrainte de surveillance. Cela est-il jouable ? Cela fait tout de même beaucoup de grilles à écrire. En pratique la question de la réalisation à la main est à peine posée qu'on peut se poser la question de l'algorithme à poser sur ordinateur. Je ne sais pas engendrer une permutation de n éléments par algorithme en un coût

Retour au sommaire

n! , mais seulement en n^n, mais cela reste tout de même accessible à un ordinateur portable. Donc lançons un programme Python qui va calculer cela. Écrivons donc un programme, sans IA.

```
def police() :
    ligne=[0,0,0,0,0,0,0]
    tot=0
    compteur=0
    for a in range(1,7) :
        ligne[1]=a
        for b in range(1,7) :
            if not(b in ligne[1 :2]) :
                ligne[2]= b
                for c in range(1,7) :
                    if not (c in ligne[1 :3])  :
                        ligne[3]=c
                        for d in range(1,7) :
                            if not (d in ligne[1 :4]) :
                                ligne[4]=d
                                for e in range(1,7) :
                                    if not (e in ligne[1 :5]) :
                                        ligne[5]=e
                                        for f in range(1,7) :
                                            if not (f in ligne[1 :6]) :
                                                ligne[6]=f
                                                tot=tot+1
                                                dc=0
                                                dd=0
                                                for i in range(1,7) :
                                                    if ligne[i]==i :
                                                        dd=dd+1
                                                    if ligne[i]==7-i :
                                                        dc=dc+1
                                                    if dc>0 and dd>0 :
                                                        compteur=compteur+1
    return compteur
```

L'exécution `police()` renvoie 270, qui est donc la réponse à la question posée.

Commentaires

— La manière d'engendrer une permutation de 6 policiers/caméras sur les 6 colonnes en 6 boucles imbriquée et complexité 6^6 est le fait d'un programmateur à l'ancienne et peut-être que Python a une routine déjà prête. La gestion à chaque boucle de la liste des colonnes déjà choisies permet de réduire la complexité.

Retour au sommaire

— `dc` et `dd` comptent le nombre de policiers/caméras présents, respectivement, sur la diagonale croissante (ascendante) et la diagonale descendante.

JOURNÉES NATIONALES

Les inscriptions aux Journées Nationales de Toulon 2025 sont ouvertes dans le plan de formation académique et sur le site de l'APMEP.

Pour l'inscription académique, il faut passer par SOFIA et en sélectionnant, dans *Mon espace stagiaire*, *Mon plan de formation individuelle*. Il faudra alors chercher les Journées de l 'APMEP dans *Disciplines d'enseignement*, dispositif 25A0120948, puis se préinscrire.

Pour l'inscription aux ateliers et conférences, il faut créer un compte sur le site des Journées.

Comme les années précédentes, la régionale tiendra un stand très convivial.
L'atelier « Objets de la Régionale » sera à nouveau proposé pour présenter et faire manipuler les nouveaux objets.