# PROBLÈME 162
# LANCERS

Proposé par Jacques Choné

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. On effectue des lancers successifs d'une pièce équilibrée jusqu'à obtenir k faces consécutives. Quelle est la probabilité que le nombre de lancers nécessaires soit impair ?

# SOLUTION PROBLÈME 161
# ÉLARGIR LE CERCLE

Proposé par Jacques Verdier

## Enoncé

Etant donnés un cercle C et deux points A et B, peut on construire un cercle $\Gamma$ passant par les deux points A et B et tangent au cercle C ?

## Solution

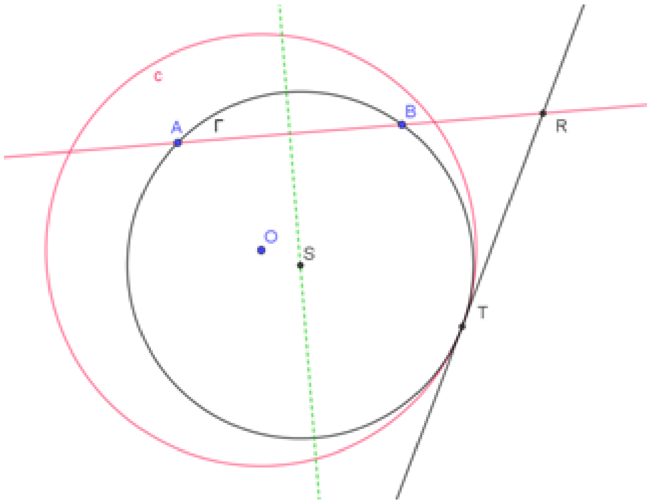
Une solution à ce problème a été proposée par Fabien Lombard, elle correspond à la construction que proposait Jacques Verdier et qui s'appuie sur le centre radical de trois cercles. En fin d'article je proposerai une deuxième solution qui fait intervenir une inversion.

### Démonstration 1

Si les deux points A et B sont séparés par le cercle , le problème n'a pas de solution, tout cercle passant par A et B sera sécant au cercle $\Gamma$.

Supposons le problème résolu dans le cas où les points A et B sont à l'intérieur du cercle C, on note T le point de tangence des deux cercles. On suppose que la droite $(AB)$ et la tangente commune aux deux cercles sont concourantes en R (on étudiera ultérieurement le cas où les droites sont parallèles).

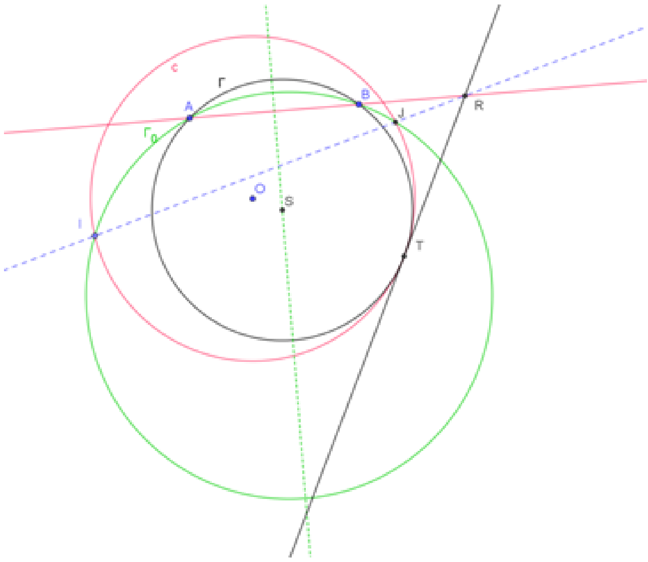
Retour au sommaire




Le nombre $RT^2$ est la puissance du point R par rapport aux deux cercles C et $\Gamma$, on a donc $P(R, \Gamma) = RT^2 = \overline{RA} \times \overline{RB}$

Par conséquent, le point R aura la même puissance par rapport à tout autre cercle passant par A et B. Ainsi, pour tout point I du cercle C, alors R a la même puissance par rapport au cercle $\Gamma_0$ passant par les points I, A et B.

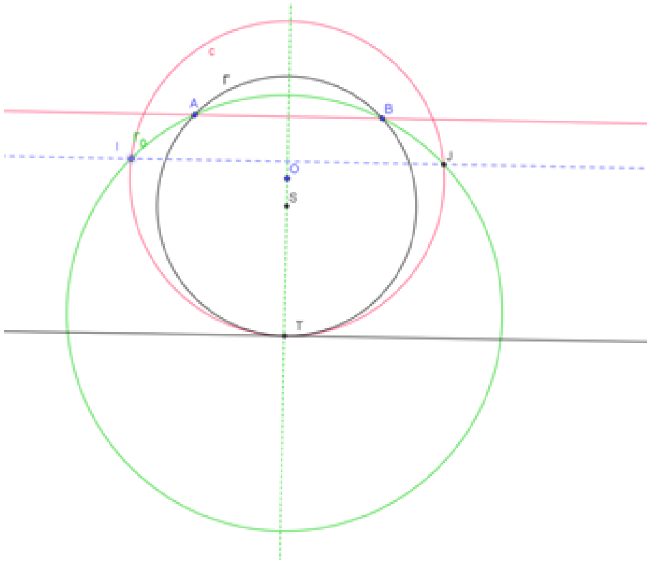
Le point R est le centre radical des trois cercles C , $\Gamma$ et $\Gamma_0$ ; on sait alors que R est à l'intersection des trois axes radicaux des trois cercles pris deux à deux.




En conséquence, pour construire le cercle $\Gamma$, il suffit de construire R comme intersection de la droite $(AB)$ avec la droite $(IJ)$, les points I et J étant les points d'intersection du cercle C et d'un cercle « auxiliaire » passant par A et B.

*Question 1* : peut-on toujours choisir I tel que les droites $(AB)$ et $(IJ)$, soient concourantes ?

Supposons que les droites $(AB)$ et $(IJ)$, soient parallèles.

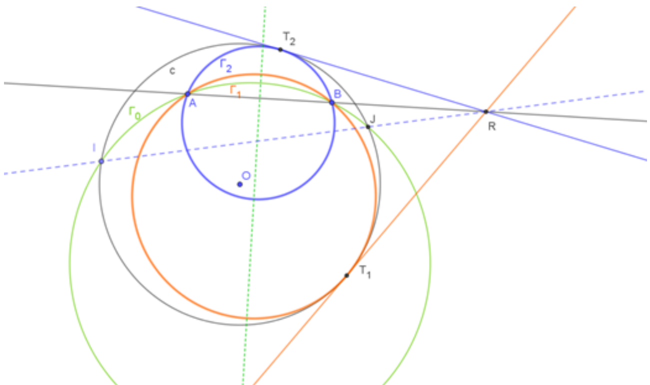



Dans ce cas le centre radical est envoyé à l'infini et les droites $(\mathrm{AB})$ , (IJ), et la tangente commune à C et $\Gamma$ sont parallèles. Par conséquent la médiatrice de $(\mathrm{AB})$ est un axe de symétrie de chacun des trois cercles, en particulier du cercle C ; on en déduit que $\mathrm{OA} = \mathrm{OB}$.

Réciproquement si $\mathrm{OA} = \mathrm{OB}$, la médiatrice de $[\mathrm{AB}]$ est un axe de symétrie du cercle C et par conséquent, si on note T le point d'intersection de cette médiatrice avec le cercle C, le cercle passant par A, B et T répond à la question.

*Question 2* : y-a-t-il plusieurs solutions ?

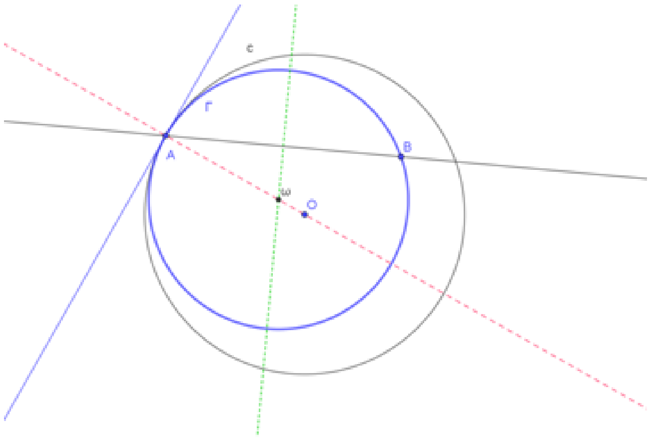
Le point R étant construit comme centre radical des trois cercles C, $\Gamma$ et d'un cercle intermédiaire $\Gamma_0$, on peut tracer deux tangentes au cercle C passant par A. Chacune de ces tangentes donne une solution.



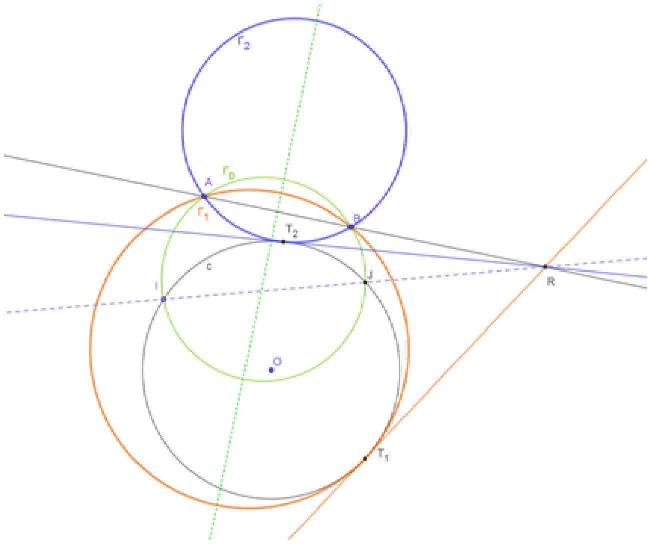

*Question 3* : que se passe-t-il dans le cas particulier où un des points A ou B est sur le cercle C ?

Prenons par exemple le cas où A est sur le cercle C. Dans ce cas le point R est en A, la tangente issue de R est la droite $\Delta$ tangente à C en A, le centre du cercle solution est à l'intersection de la médiatrice de $[\mathrm{AB}]$ avec la perpendiculaire à $\Delta$ issue de A.

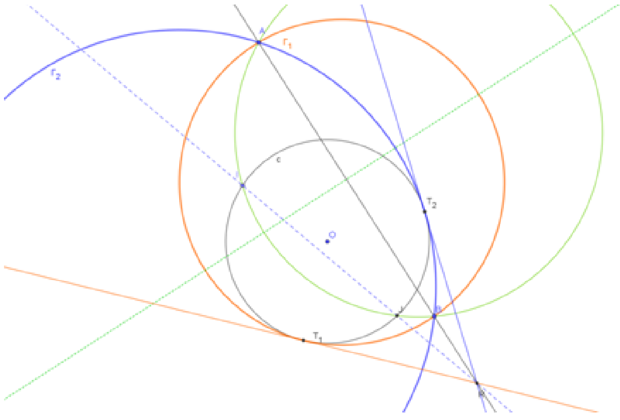
Retour au sommaire




Dans le cas où les points A et B sont extérieurs au cercle C, on a les mêmes raisonnements et résultats, illustrés ci-dessous.




Ou encore



*Remarque* : Si la droite $(AB)$ est tangente au cercle C, dans ce cas un des cercles est « dégénéré », et il n'y a qu'une solution

Retour au sommaire

## Démonstration 2

Je trouve la démonstration ci-dessous intéressante, car elle illustre toute l'efficacité de l'utilisation de la notion d'inversion. (Pour ceux qui sont intéressés par cette transformation, le livre de Jean-Pierre Boudine, « Inversion, l'harmonie des cercles » aux éditions EDP Sciences est particulièrement riche).

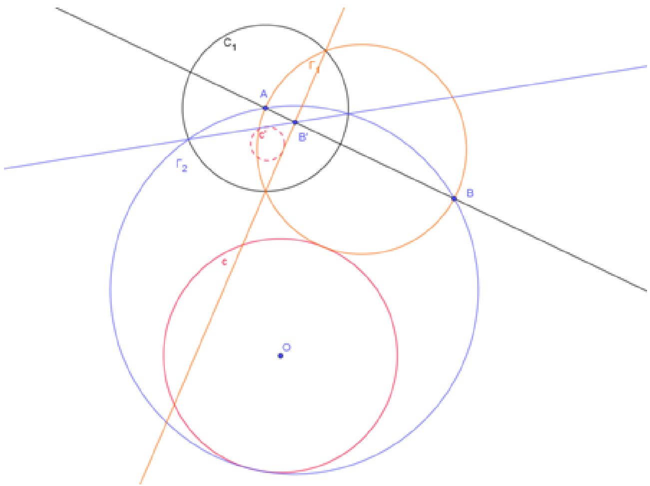
Puisque la question relève d'un problème de contact entre deux cercles, l'idée est d'utiliser les propriétés de l'inversion, pour « renverser » classiquement la problématique en une question de contacts entre droites et cercles.

Le ou les cercles solutions sont tangents à C, on en déduit que les images de ces cercles par une inversion I seront également tangents à $C'$ image de C par cette inversion (l'inversion conserve les contacts). Si on veut transformer le problème en une problématique de droite et cercle, il est donc souhaitable que le centre d'inversion soit sur un cercle solution, ce qui invite à choisir A ou B comme centre d'inversion, A par exemple. Notons $B'$ l'image de B par une inversion I de centre A.

Le ou les cercles solutions auront donc pour images des droites passant par $B'$ et tangentes à $C'$.

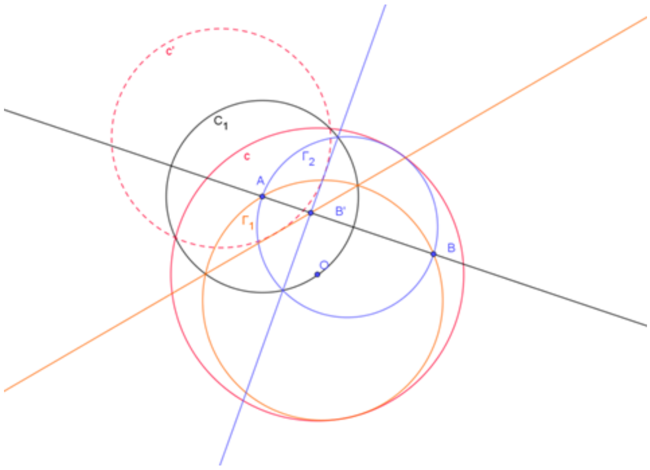
Ainsi on suit la procédure ci-dessous :

On choisit un cercle $C_1$ de centre A ; l'inversion I de cercle $C_1$ transforme C en $C'$, et B en $B'$. On trace les tangentes à $C'$ passant par $B'$ ; l'inversion de cercle $C_1$ va transformer chacune de ces droites tangentes à $C'$ en des cercles tangents à C, passant par B (image de $B'$ par l'inversion qui est involutive) et par A (l'image d'une droite qui ne passe pas par le centre d'inversion est un cercle qui passe par le centre de l'inversion )
Ainsi :



Ou encore

Retour au sommaire




Dans le cas particulier où le point B appartient à C, $B'$ est un point de $C'$ et il n’y a qu’une tangente à $C'$ issue de $B'$ et par conséquent, il n’y a qu’un cercle solution.

Retour au sommaire