

MODÉLISATION EN STMG

Gilles Waehren

Lycée Jean de Pange - Sarreguemines

Parce que le lien entre suites numériques et algorithmique est assez fort, l'usage du tableur ou celui de la programmation vont de soi pour étudier leur évolution et répondre à certains problèmes. En STMG, au-delà de l'application de formules propres à la résolution de tel ou tel exercice, ces deux outils numériques sont surtout un bon moyen d'apprivoiser les suites arithmétiques ou géométriques.

J'avais conçu, il y a deux ans en Terminale STMG, une activité qui permettait de modéliser des situations simples, à l'aide de ces suites sur tableur et en Python, pour répondre à des problèmes de seuil. Il m'a semblé tout naturel cette année, en Première STMG cette fois-ci, de construire une autre activité, ascendant logique de celle de Terminale, dont l'objectif était de comparer les types de croissance des suites arithmétiques, géométriques et même arithmético-géométriques.

En Terminale

Activité tableur

Dans chacun des cas suivants :

- donner la relation de récurrence ;
- indiquer si la suite est géométrique, arithmétique ou autre ;
- calculer les 100 premiers termes sur tableur ;
- déterminer n pour passer le seuil.

Cas 1 : le nombre d'abonnés à une médiathèque augmente de 10 chaque année (premier terme : 2000, seuil : 2635)

Cas 2 : la population augmente de 2% par an (premier terme : 7 milliards, seuil : 10 milliards)

Cas 3 : les d'élèves d'un collège sont 15 de moins tous les ans (premier terme : 500, seuil : 0)

Cas 4 : les émissions de gaz à effet de serre en France doivent diminuer de 5% par an (premier terme : 335 millions de tonnes, seuil : 100 millions de tonnes)

Cas 5 : sur un placement à 4% annuel, on retire 100 euros chaque année (premier terme : 1000, seuil : 0)

Activité Python

Après avoir donné les programmes Python permettant de calculer le terme de rang n d'une suite arithmético-géométrique et le rang du terme dont la valeur franchit un certain seuil, les élèves devaient adapter les programmes pour répondre aux cinq situations précédentes. La plus-value d'un programme Python sur le tableur réside surtout dans le fait qu'il n'est pas nécessaire de recopier la formule un nombre de fois qu'on ne peut déterminer à l'avance sans un calcul. Le final de l'activité était un calcul de somme géométrique avec la méthode de son choix : tableur ou Python.

Ces deux activités se sont déroulées sur deux ou trois séances de groupe. Le fonctionnement des programmes Python a été longuement expliqué et, au vu des résultats en contrôle sur la question de programmation, certains élèves semblaient l'avoir assimilé. Surtout, la question n'a pas été majoritairement évacuée comme cela peut parfois arriver, y compris à l'examen. Il est difficile, deux ans plus tard, de produire un bilan plus précis de ce travail.

En Première

Après une précédente activité permettant de faire le lien entre terme général ou relation de récurrence et formule tableur, pour générer les termes d'une suite, j'ai proposé aux élèves de s'attaquer au modèle de Malthus. À partir d'un court texte historique, il s'agissait d'évaluer la vraisemblance d'une modélisation. Pour rappel, Malthus s'appuyait sur deux hypothèses :

- une croissance exponentielle de la population anglaise ;
- une croissance linéaire des moyens de subsistance de cette population.

On suppose ainsi que la population anglaise est de 11 millions d'habitants en 1850 et que les moyens de subsistance couvrent parfaitement les besoins de cette population. J'ai ensuite proposé deux évolutions :

- une augmentation annuelle de la population de 2,8 % ;
- une augmentation annuelle des moyens de subsistance de 440000 habitants par an.

La deuxième partie du travail avait pour but de réinvestir les méthodes de comparaison d'évolution sur la base de l'étude du nombre d'abonnés de quatre services de programmes vidéo. Les modèles reposaient sur une suite arithmétique, une suite géométrique et deux suites arithmético-géométriques.

Texte de l'activité 1

Problème 1

« Comptons pour 11 millions la population de la Grande-Bretagne et supposons que le produit actuel de son sol suffit pour la maintenir. Au bout de vingt-cinq ans, la population sera de 22 millions ; et la nourriture ayant également doublé, elle suffira encore à l'entretenir. [...] La race

humaine croîtra selon la progression 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256... tandis que les moyens de subsistance croîtront selon la progression 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 [...].»

Thomas Robert Malthus, Essai sur le principe de population, 1798.

Sur le texte

- 1) Quelle est la nature de la suite des nombres d'habitants ?
- 2) Quelle est la nature de la suite des moyens de subsistance ?

Sur tableur On appelle (p_n) la suite des nombres d'habitants britanniques (en millions), en supposant qu'il y a 11 millions d'habitants en 1800. On suppose que cette population augmente de 2,81 % par an.

On appelle (s_n) la suite des moyens de subsistance (en millions), en supposant qu'on peut nourrir 11 millions d'habitants en 1800. On suppose que les moyens de subsistance permettent de nourrir 440 000 habitants de plus chaque année.

- 1) Dans une feuille de calcul créer quatre colonnes : année, n , p_n , s_n
- 2) Saisir dans la ligne 2 les valeurs initiales : 1800, 0, 11, 11
- 3) Saisir dans la ligne 3 les formules qui permettent de calculer les valeurs suivantes : 1801, 1, p_1 et s_1 .
- 4) Recopier ces formules vers le bas pour afficher les évolutions jusqu'en 1900.
- 5) Donner une représentation graphique des suites (p_n) et (s_n)
- 6) Que pensez-vous du modèle de Malthus ?

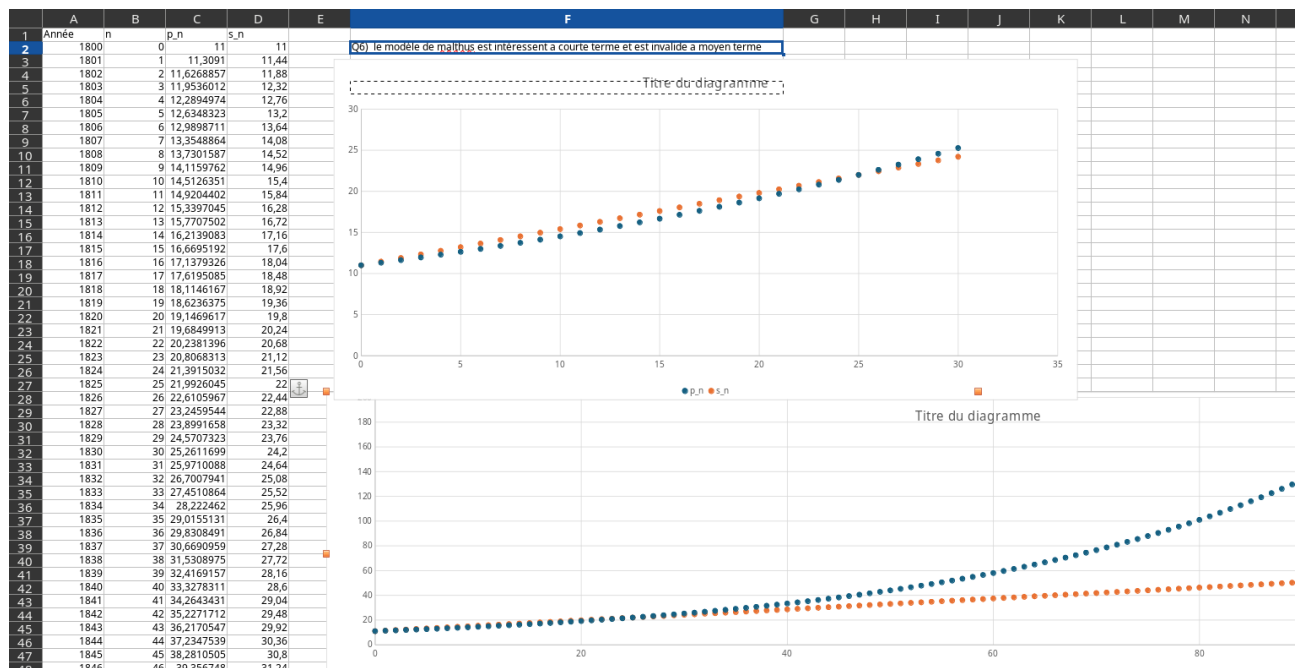
En 1838, Verhulst corrige ce modèle en introduisant la notion de capacité d'accueil du milieu, c'est-à-dire le nombre d'individus maximal que le milieu peut accueillir en tenant compte de l'espace, des ressources, etc.

Attendus

L'idée était que les deux suites sous-jacentes aient des termes à peu près égaux, 25 ans plus tard. On pouvait ainsi se rendre compte que sur un siècle, le modèle n'était plus soutenable. Les représentations graphiques de deux suites dans un même repère ont permis, sur 25 ans et sur 50 ans, de comparer les évolutions des suites. Les élèves ont vite compris que, étant donné que la population anglaise n'est pas éteinte, le modèle a ses limites.

Productions d'élèves

Anis



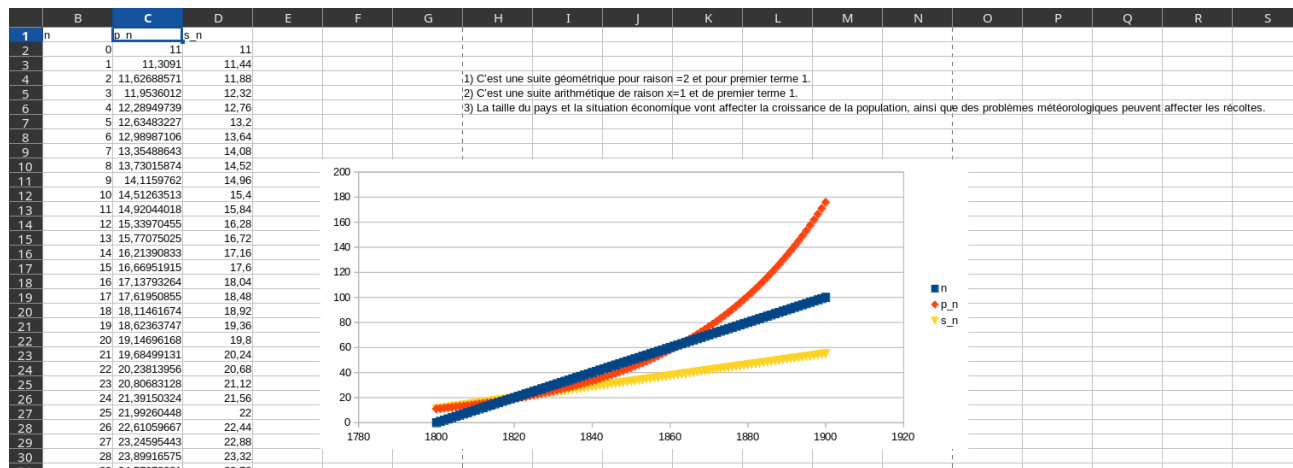
Il a fallu lui donner un sérieux coup de main pour le faire avancer ; c'est un peu symptomatique de beaucoup d'élèves de sa classe. Il a repris la conclusion proposée en classe : « le modèle de Malthus est intéressant à court terme et est invalide à moyen terme »

Baptiste



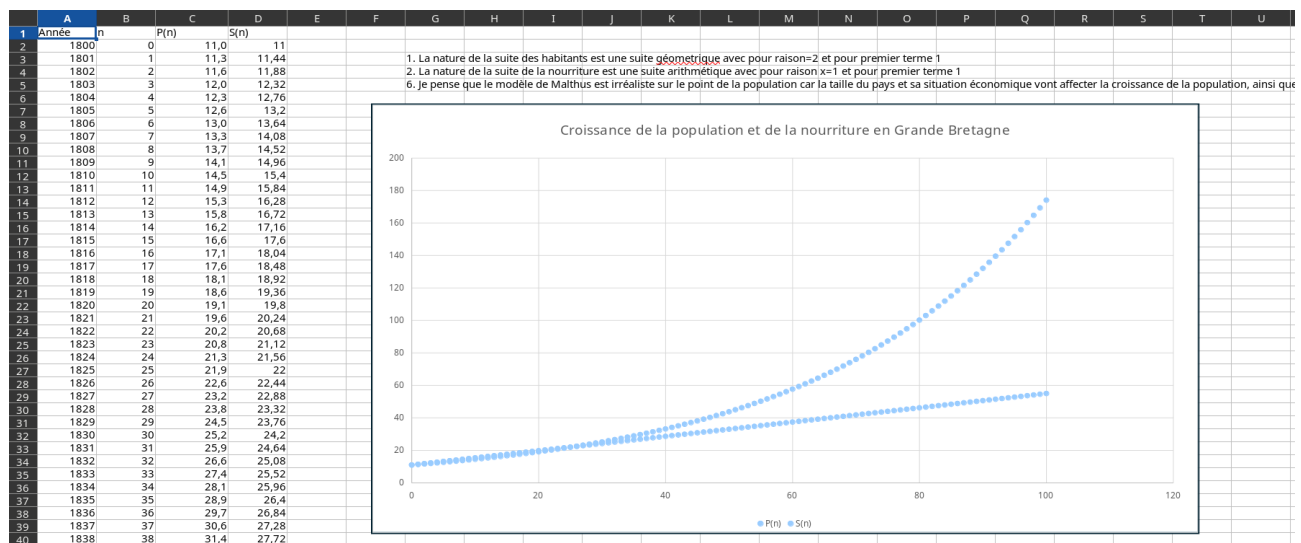
Il n'a pas inséré de représentation graphique : la comparaison est plus difficile. La conclusion manque de précision : « Je pense que le modèle de Malthus augmente la population plus vite que les ressources ».

Jade



Le graphique inclut la première colonne qui devait constituer l'axe des abscisses. Les insertions de graphique ne sont pas chose aisée sur tableur. Renseignement pris, sa conclusion : « La taille du pays et la situation économique vont affecter la croissance de la population, ainsi que des problèmes météorologiques peuvent affecter les récoltes. » est inspirée du cours d'économie-droit qui mentionnait l'impact du climat dans les problèmes de productions agricoles.

Samuel



Samuel est un élève productif : un travail à faire doit être complètement réalisé dans les meilleurs délais. Il est efficace mais ne tient pas toujours compte des indications données en classe. Sa conclusion : « Je pense que le modèle de Malthus est irréaliste sur le point de la population car la taille du pays et sa situation économique vont affecter la croissance de la population, ainsi que des problèmes météorologiques peuvent affecter les récoltes. » s'en ressent.

Conclusion

La réalisation des représentations graphiques a été délicate, mais surtout il s'est agi de choisir une représentation adaptée. Ainsi, si une étude sur un siècle permet de mesurer les limites du modèle, l'observation sur 25 ans montre sa pertinence à court terme. L'énoncé aurait pu être plus

directif en ce sens. Cette première partie de l'activité s'est conclue avec une rapide explication de la modélisation de Verhulst qui tient notamment compte de l'adaptation de la croissance de la population à ses propres moyens de subsistance. On aurait pu prolonger le débat sur la notion de Jour du dépassement...

Deuxième partie

La première activité ayant été suffisamment guidée, le travail a été plus autonome. Toutefois, les élèves ont rencontré des difficultés sur les ordres de grandeur et sur les représentations graphiques, puisqu'aucune durée d'étude n'avait été imposée.

Texte de l'activité

Problème 2

Dans une grande agglomération, 4 chaînes de télévision proposent des abonnements renouvelables chaque trimestre. On suppose que les tendances observées vont se maintenir quelques années.

Chaîne 1 : 8000 abonnés initialement et 500 nouveaux recrutés chaque trimestre.

Chaîne 2 : 5000 abonnés initialement et croissance de 8% du nombre d'abonnés chaque trimestre.

Chaîne 3 : 10000 abonnés initialement, un taux de réabonnement trimestriel de 80% et 2500 nouveaux recrutés chaque trimestre.

Chaîne 4 : 25000 abonnés initialement, un taux de réabonnement de 85% chaque trimestre et 3500 nouveaux recrutés chaque trimestre.

Source de l'activité

On veut comparer l'évolution de chaque chaîne du point de vue du nombre de ses abonnés. L'étude éventuelle de l'évolution à long terme se fera en supposant que les tendances données dans l'énoncé se maintiendront plusieurs années.

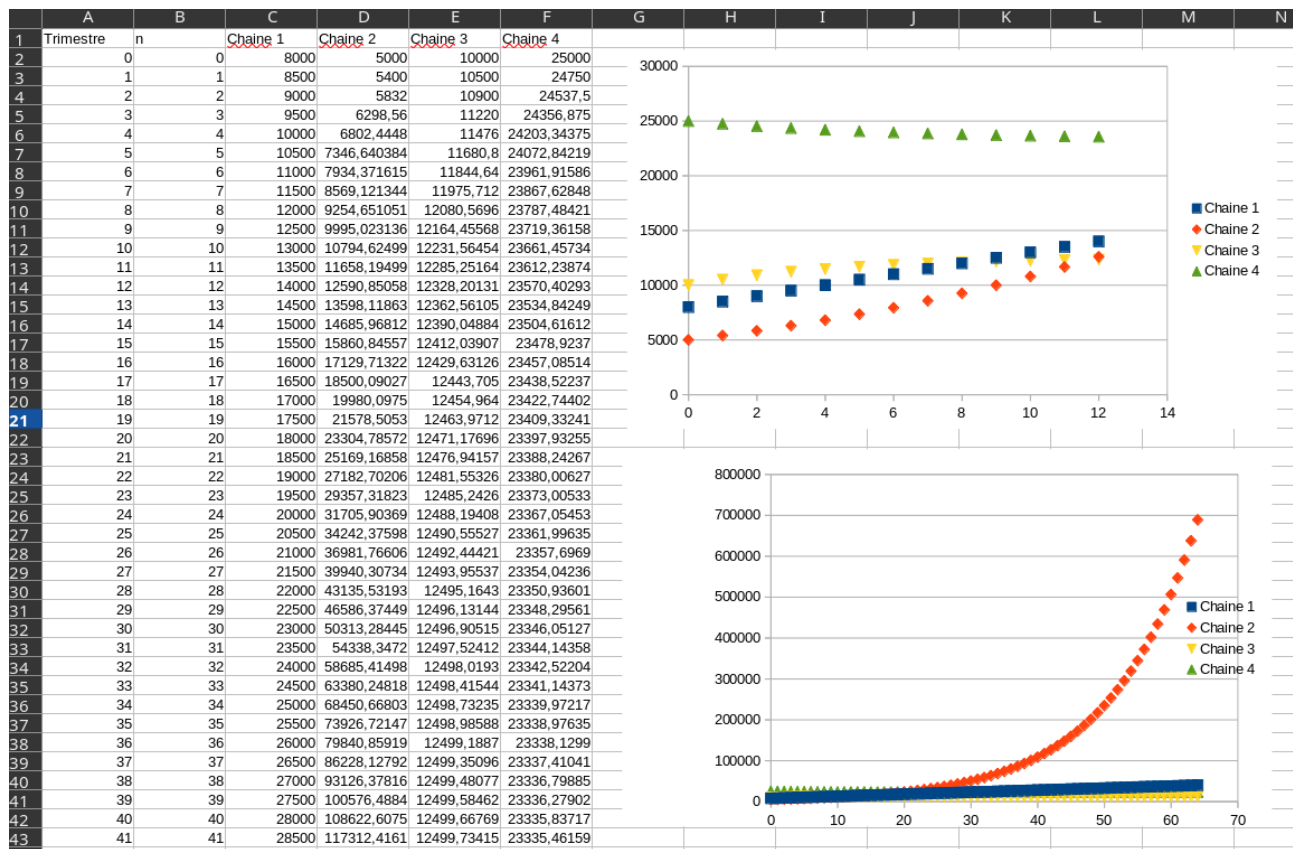
Sur tableur, créer cinq colonnes, pour comparer l'évolution des 4 chaînes :

- une colonne pour les valeurs de n , le nombre de trimestres ;
- une colonne par chaîne ;
- les intitulés des colonnes dans la première ligne ;
- les valeurs initiales dans la deuxième ligne ;
- les formules dans la troisième ligne ;
- l'ensemble de toutes les valeurs dans les suivantes.

Comparer les évolutions à l'aide d'une représentation graphique.

Une production d'élève

Ethan On peut ici constater que le choix de l'échelle de temps change la perception des évolutions.



Bilan et amélioration

Cette activité en Première s'est déroulée sur deux séances d'une heure, en groupes. Les élèves ont rendu le fichier tableur sur Moodle. L'évaluation a tenu compte de leur réussite dans chaque phase des deux parties, suivant leur degré d'autonomie. En général, le travail doit être rendu en fin de séance pour éviter les fuites de fichier entre élèves. Ils savent que je suis assez vigilant à ce sujet donc ceux qui n'ont pas le temps de terminer n'essaient pas de tricher. Toutefois, ChatGPT, les aide de plus en plus à trouver les formules tableur manquantes. Ainsi, on pourrait accentuer l'évaluation sur l'interprétation des résultats obtenus et sur le choix des représentations graphiques.