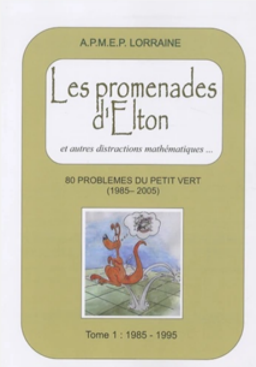
## Problèmes

Un problème est proposé dès le deuxième numéro du Petit Vert. Jacques avait regroupé les 80 premiers dans une brochure papier.




# PROBLÈME 161
# ÉLARGIR LE CERCLE

Proposé par Jacques Verdier

Étant donnés un cercle C et deux points A et B, peut-on construire un cercle Γ passant par les deux points A et B et tangent au cercle C ?

Le responsable de cette rubrique est Philippe Févotte.

*Envoyez lui vos propositions de solutions à ce problème (nous espérons en avoir une grande quantité), ainsi que toute proposition de nouveau problème.*

J'ai eu peu de contacts professionnels avec Jacques, lorsque j'étais enseignant ou IA-IPR, mais quand j'ai repris cette rubrique, il a été le premier à m'accompagner en proposant problèmes et solutions aux énoncés. Nous nous retrouvions souvent aux conférences proposées par El-Haj Laamri dans le cadre des conférences du cycle « sciences et société », et bien au-delà des seules mathématiques, son intérêt pour les sciences se manifestait au travers de ses interventions souvent pertinentes… et parfois malicieuses.

Philippe Févotte

Retour au sommaire

# SOLUTION PROBLÈME 160 RÉGIONNEMENT

Proposé par Fabien Lombard

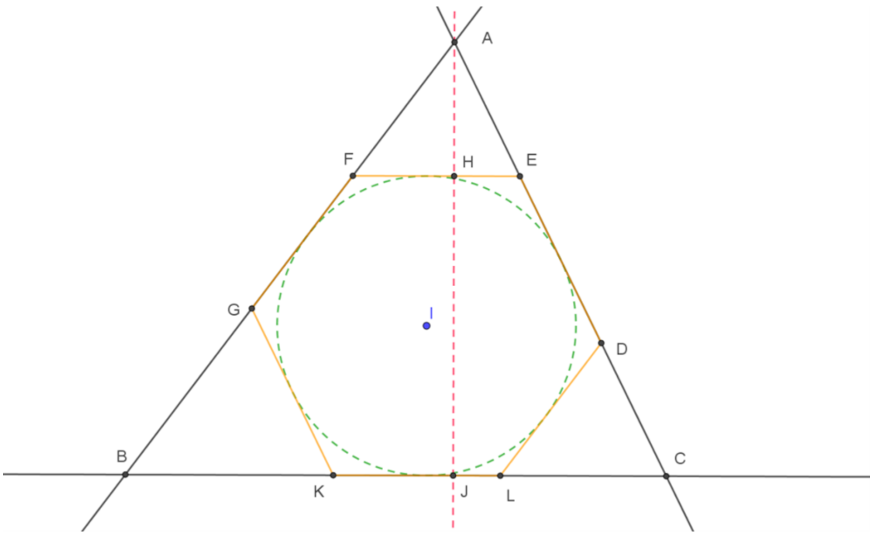
On considère un triangle ABC quelconque ; on trace le cercle de centre I inscrit dans ce triangle ainsi que les tangentes à ce cercle, parallèles aux côtés du triangle ABC. On construit ainsi l'hexagone DEFGKL.

On note a, b et c les longueurs des côtés du triangle ABC et $\rho = \dfrac{\text{périmètre}(\text{DEFGKL})}{\text{périmètre}(\text{ABC})}$.

Déterminer $\rho$ en fonction des longueurs a, b et c puis montrer que $\rho \leq \dfrac{2}{3}$. Peut-on avoir $\rho = \dfrac{2}{3}$ ?

**Solution**

La symétrie de centre I transforme la droite (EF) en sa parallèle (BC) et la droite (AB) en (DL), par conséquent elle transforme le point F intersection de (EF) et (AB) en le point L intersection de (BC) et(DL). Par un raisonnement analogue, cette symétrie transforme E en K et G en D. On en déduit donc que les côtés opposés de l'hexagone ont la même longueur.




En notant p le demi-périmètre du triangle ABC, a'=EF, b'=GK et c'=DL, on a alors $\rho = \dfrac{a' + b' + c'}{p}$.

On trace la hauteur issue de A et on note $h_A = AJ$ et r le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC.

On a alors $\dfrac{EF}{BC} = \dfrac{AH}{AJ} = \dfrac{h_A - 2r}{h_A} = 1 - 2\dfrac{r}{h_A}$.

Des relations $\text{aire}(ABC) = rp$ et $\text{aire}(ABC) = \dfrac{ah_A}{2}$, on tire que $r = \dfrac{ah_A}{2p}$ et par conséquent que $\dfrac{EF}{BC} = \dfrac{a'}{a} = 1 - \dfrac{a}{p}$.

On en déduit que $a' = a - \dfrac{a^2}{p}$, de même $b' = b - \dfrac{b^2}{p}$ et $c' = c - \dfrac{c^2}{p}$.

Par conséquent : $\rho = \dfrac{a' + b' + c'}{p} p = \dfrac{a+b+c}{p} - \dfrac{a^2+b^2+c^2}{p^2}$.

Retour au sommaire

Soit finalement

$$\rho = 2 - 4\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}$$

Si on considère les vecteurs (1,1,1) et (a,b,c)de $\mathbb{R}^3$, on sait par l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$ et que l'égalité a lieu seulement lorsque a=b=c.

En conséquence $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2} \geq \dfrac{1}{3}$ et donc $\rho \leq \dfrac{2}{3}$ , avec égalité lorsque le triangle ABC est équilatéral.

Jacques Choné a proposé également une solution à cet exercice. Il considère l'homothétie de centre A qui transforme le triangle ABC en le triangle AFE et obtient ainsi les mêmes relations entre a' et a puis de manière analogue entre b' et b, puis entre c' et c.

N'ayant pas utilisé l'égalité des côtés opposés (obtenus par symétrie), il lui faut calculer, en s'appuyant sur l'homothétie de centre B qui transforme BGK en BAC, la longueur BK ; en s'appuyant sur l'homothétie de centre C qui transforme CLD en CBA , la longueur LC avant d'en déduire la longueur KL.
On obtient de même les deux dernières longueurs.

Pour conclure, il écrit que

$$\rho = 2 - 4\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2} = 2 - 4\frac{(a+b+c)^2 - 2ab - 2ac - 2bc}{(a+b+c)^2} = -2 + 8\frac{ab+ac+bc}{(a+b+c)^2}$$

Par conséquent

$$\rho = -2 + 8\frac{ab+ac+bc}{a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)} = -2 + \frac{8}{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+ac+bc}+2}$$

En utilisant le fait que $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2 \geq 0$ est équivalent à $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+ac+bc} \geq 1$, (avec égalité lorsque a=b=c), il obtient la conclusion attendue.

Retour au sommaire