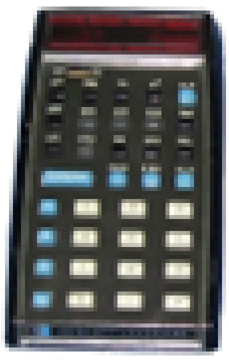
CALCULATRICES

Gilles Waehren

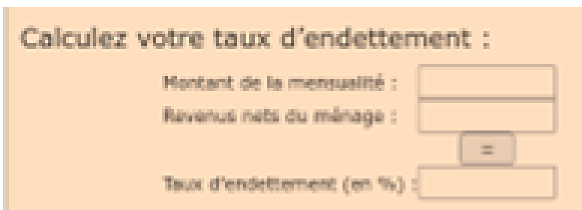
En décembre 2008, la rubrique ”Vu sur la Toile a vu le jour. Dans ce Petit Vert n°96, Gilles Waehren avait pris la plume pour nous parler des excellents films ”Dimensions” et rappeler le forum académique autour de GeoGebra.

Outil controversé, la calculatrice a tôt fait d’inspirer de nombreux articles dans le Bulletin Vert de l’APMEP, que ce soit pour évaluer la précision des résultats qu’elle produit que pour s’interroger sur sa place dans la pédagogie. En voie de disparition progressive, cet outil, né avec la Pascaline, a suscité espoirs, polémiques et, maintenant, nostalgie. Certes, la calculette reste très présente dans les cartables des élèves du primaire et du secondaire, mais se raréfie dans les études supérieures. L’avènement de la calculatrice électronique dans les années 1970 a permis de démocratiser le calcul, le singularisant dans l’activité mathématique. Cependant la conception des mécaniques d’abord, puis des programmes en langage machine, a permis de mettre en évidence l’usage d’algorithmes parfois éloignés de nos pratiques habituelles de l’enseignement scolaire.
Dans cette rubrique un peu spéciale, je proposerai quelques liens, comme à l’accoutumée, mais l’essentiel de son contenu sera constitué par les deux articles de Jacques Verdier sur les algorithmes de calcul des logarithmes et des fonctions trigonométriques.



Mes recherches m’ont conduit à ce portail, qui, à défaut d’être explicite, donne accès à de nombreux sites intégrant des outils en ligne . On y trouve une (très) brève histoire de la calculatrice. Une histoire un peu plus détaillée est consultable sur le site de purecalculator, qui se veut proche des scientifiques. Yvan Monka a collecté un grand nombre de photos de la calculatrice à travers les âges et fournit des liens vers des musées virtuels de la calculatrice tel celui des produits HP. Pour les modèles les plus anciens, on pourra visionner quelques exemples ici.

Beaucoup de calculateurs sont également disponibles sur calculateur.com comme ce petit programme permettant d’évaluer son taux d’endettement.



Enfin, Mathématiques et Technologies met à la portée de tous un grand nombre d’algorithmes de calcul de nombres.

PETIT VERT N°3
CALCULETTE

Jacques Verdier

LA CALCULETTE : COMMENT CALCULE-T-ELLE ? (1)

Comment s'y prend la calculette pour calculer ln$x$, log$x$, e^x, etc. ?

Le développement en série $\ln(x+1)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$ a une convergence beaucoup trop lente pour être utilisable (et de plus il utilise des opérations qui, pour la calculette, ne sont pas élémentaires : $\frac{x^n}{n}=x^{n-1}\times\frac{x}{n}$ utilise une multiplication et une division, opérations « lentes »).

Au contraire, les calculettes utilisent à peu de choses près l'algorithme décrit par BRIGGS vers 1624 pour calculer (à la main !) les logarithmes de NEPER.

1. Décomposition d'un nombre en virgule flottante

Tour réel X peut s'écrire $X = x\times 10^n$ avec $1 \leq x < 10$ et n entier naturel.

C'est sous cette forme que la calculatrice « stocke » les nombres dans ses registres de calcul et ses mémoires.

On a alors $\ln X = \ln x + n.\ln 10$.

Il suffit que la calculatrice connaisse ln10 et sache calculer ln$x$ pour calculer ln$X$.

En mémoire morte, elle a ln10 = 2,302 585 092 994 012

2. Calcul de ln$x$ pour $1 \leq x < 10$

Considérons la suite $A_0 = 1+10^0 = 2$; $A_1 = 1 + 10^{-1} = 1{,}1$; $A_2 = 1 + 10^{-2} = 1{,}01$; $A_3 = 1 + 10^{-3} = 1{,}001$ … $A_i = 1 + 10^{-i}$ …

On peut facilement montrer que $(A_i)^{10} > A_{i-1}$: en effet, pour $u > 0$ et $n \geq 2$, on a $\ln(1+u)^n > 1+nu$.

D'autre part, $\lim\limits_{i\to\infty} A_i = 1$ (évident).

Algorithme de calcul de ln$x$:

- On multiplie x par A_0 autant de fois que c'est possible sans que le résultat dépasse 10 : soit n_0 le nombre de multiplications faites, et soit $x_0 = (A_0)^{n_0}$. On a donc $x_0 < 10$ et $x_0\times A_0 \geq 10$.
- On multiplie x_0 par A_1 autant de fois que c'est possible sans que le résultat dépasse 10 : soit n_1 le nombre de multiplications faites, et soit $x_1 = (A_1)^{n_1}$, c'est-à-dire $x_1 = x\times(A_0)^{n_0}\times(A_1)^{n_1}$. On a donc $x_1 < 10$ et $x_1\times A_1 \geq 10$.
- Et ainsi de suite…

Retour au sommaire

Par exemple, pour x = 3,5 :
$3{,}5\times 2^1\times(1{,}1)^3\times(1{,}01)^7\times(1{,}001)^1\times(1{,}0001)^0\times(1{,}00001)^9\times(1{,}000001)^2 \approx 10$
Ces multiplications par A_i sont très rapides pour la calculette, car ce ne sont que des « décalages à gauche » et des additions.
Le lecteur pourra vérifier que :

a) pour tout i, $n_i < 10$:

b) $\lim\limits_{\infty} x_i = 10$ (en utilisant le fait que $x_i < 10 \leq x_i \times A_i$).

On en déduit que $x\times\prod\limits_0^{\infty}(A_i)^{n_i} = 10$, d'où $\boxed{\ln x = \ln 10 - \sum\limits_0^{\infty}(n_i \times \ln A_i)}$

Où s'arrêter ?
La convergence de la série ci-dessus est <u>très rapide</u> : quelques dizaines de calculs permettent d'obtenir une précision de l'ordre de 10^{-10}.

- Les calculatrices TEXAS, par exemple, s'arrêtent à $i = 6$. Elles possèdent en mémoire morte (ROM) les valeurs suivantes :

$\ln 10 = 2{,}302\ 585\ 092\ 994\ 012$ $\ln A_0 = 0{,}693\ 147\ 180\ 559\ 945$ $\ln A_1 = 0{,}095\ 310\ 179\ 804\ 325$ $\ln A_2 = 0{,}009\ 950\ 330\ 853\ 168$ $\ln A_3 = 0{,}000\ 999\ 500\ 333\ 084$ $\ln A_4 = 0{,}000\ 099\ 995\ 000\ 333$ $\ln A_5 = 0{,}000\ 009\ 999\ 950\ 000$ $\ln A_6 = 0{,}000\ 000\ 999\ 999\ 500$	chacune de ces constantes est codée en DCB [décimal codé binaire] sur 8 octets, chaque chiffre occupant 8 bits.

- L'approximation est donc $\ln x \approx \ln 10 - \sum\limits_0^{6}(n_i \times \ln A_i)$, par excès. L'erreur commise en prenant cette approximation est $\sum\limits_7^{\infty}(n_i \times \ln A_i)$. Il a été démontré qu'une <u>bonne estimation</u> de cette erreur était $\left(1-\dfrac{x^6}{10}\right)$. D'où le calcul fait par la touche de la calculatrice : $\boxed{\ln x = \ln 10 - \sum\limits_0^{6}(n_i \times \ln A_i) + \left(1-\dfrac{x^6}{10}\right)}$

  Par exemple, pour $x = 3{,}5$, ce calcul – fait « à la main » avec les valeurs des $\ln A_i$ ci-dessus – donne $\ln 3{,}5 = 1{,}252\ 762\ 968\ 590\ 119$. Une TI58 ou une Casio fx180P affiche : 1,252 732 968.

Par Jacques VERDIER (à suivre)

Bibliographie : J.E. VOLDER, The C.O.R.D.I.C. Trigonometric Computer Technic, 1959
J.M. SMITH, Méthodes numériques pour calculateur de poche, Eyrolles.
TEXAS INSTRUMENTS, Software Exchange Newletter, vol. 2

Retour au sommaire

PETIT VERT N°4
CALCULETTE

Jacques Verdier

Pour calculer tan*x*, cos*x* ou sin*x*, comme pour calculer log*x* ou ln*x*, la calculette n'utilise pas les développements limités (leur convergence est beaucoup trop lente et ils sont très « coûteux » en opérations binaires).

La machine ramène le calcul de sin*x* et de cos*x* à celui de tan*x* par $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$ et $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$ pour tout $x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ (radians).

La machine a en mémoire morte π et 180/π, ce qui permet de convertir les angles en radians et de ramener les calculs au premier quadrant.

Algorithme de calcul de tan*x*

Le processus consiste à soustraire à x un certain nombre de constantes a_i codées en ROM (mémoire morte) jusqu'à ce que la différence soit « presque » nulle. Ces constantes sont appelées ATR (Arc Tangent Radix) et valent :

a_0 = Arctan 10^0 = π/4 = 7,853 981 633 974×10^{-1}
a_1 = Arctan 10^{-1} = 9,966 865 249 116×10^{-2}
a_2 = Arctan 10^{-2} = 9,999 666 686 665×10^{-3}
a_3 = Arctan 10^{-3} = 9,999 996 666 669×10^{-4}
a_4 = Arctan 10^{-4} = 9,999 999 966 667×10^{-5}

(une TI58 possède en mémoire a_0, a_1… a_4 codés en DCB chacun sur 8 octets).

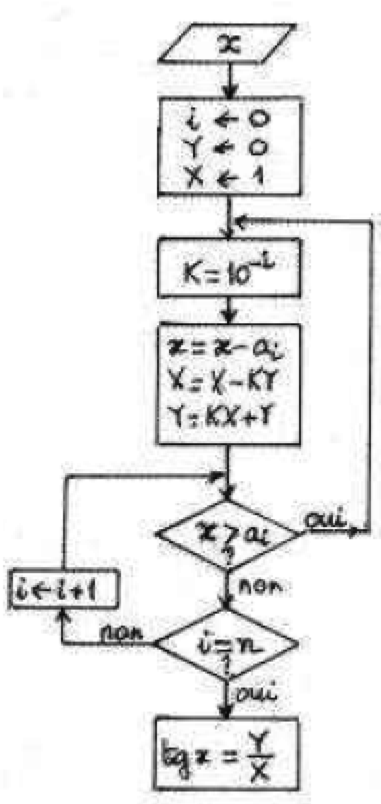
Prenons par exemple x = 1,5 (radians)

On enlève une fois π/4, 7 fois Arctan(1/10), 1 fois Arctan(1/100), 6 fois Arctan(1/1000) et 9 fois Arctan(1/100000).

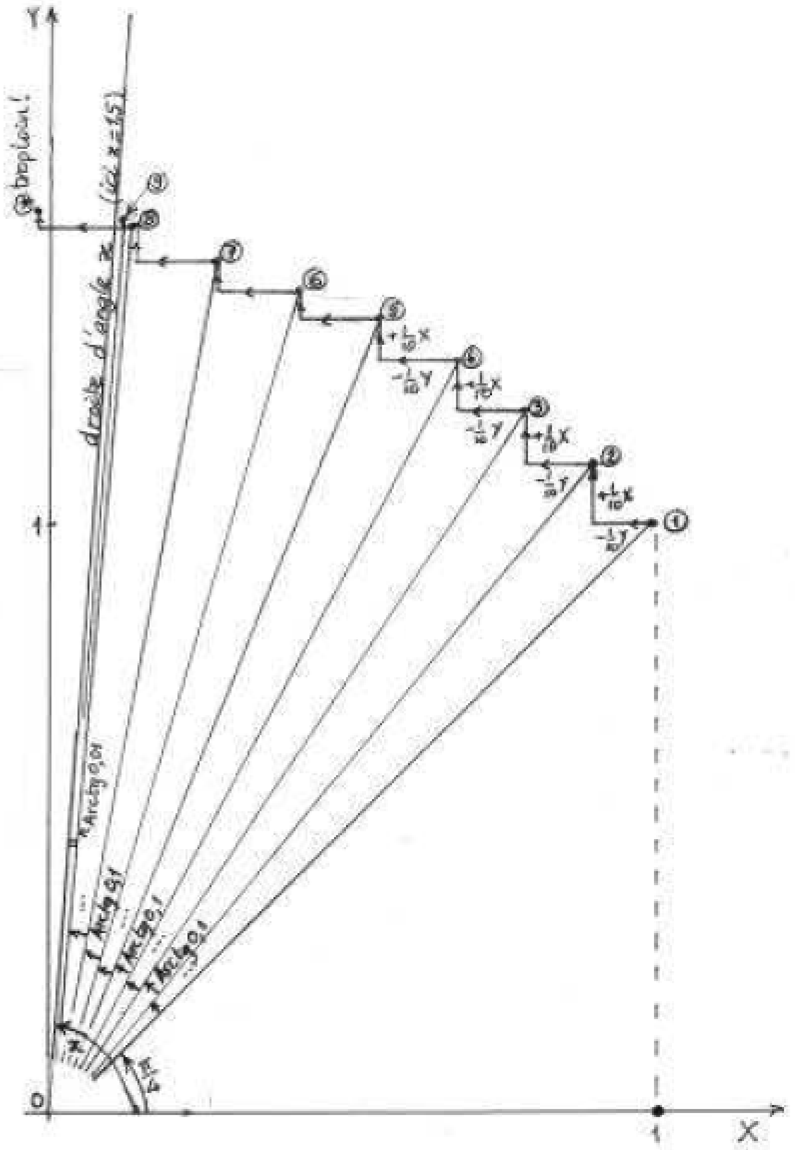
On trouve alors, avec l'algorithme, Y/X ≈ 14,101358.

(voir schéma page suivante).

Comme pour le calcul de ln*x*, il y a une estimation de l'erreur sur ce résultat, et la machine affiche tan 1,5 = 14,401 419.



Démonstration de cet algorithme dans :
J. E. VOLDER, ***The C.O.R.D.I.C. trigonometric computing technique***, 1959, IEEE Transactions on Electronic Computers, vol. 8, pp. 330-334. (consultable à Paris au CNRS et au CNET).



Le point de départ est $(X\,,\,Y) = (1\,,\,0)$. On passe d'un point au suivant par

$$\begin{cases} X \leftarrow X - \dfrac{1}{10^i}Y \\ Y \leftarrow Y + \dfrac{1}{10^i}X \end{cases}$$

Il est facile de monter que l'angle duquel on a « tourné » est $\mathrm{Arctan}(10^{-i})$, car

$$\tan(u-v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 - \tan u . \tan v} \text{ avec } \tan u = \frac{Y}{X} \text{ et } \tan v = \frac{Y + \dfrac{X}{10^i}}{X - \dfrac{Y}{10^i}}.$$