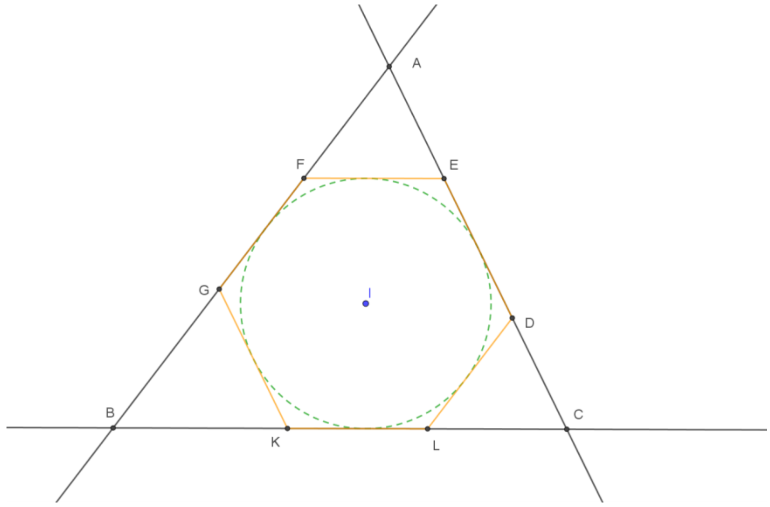
PROBLÈME 160
HEXAGONE

Proposé par Fabien Lombard

Le responsable de cette rubrique est Philippe Févotte.

Envoyez lui vos propositions de solutions à ce problème (nous espérons en avoir une grande quantité), ainsi que toute proposition de nouveau problème.

On considère un triangle ABC quelconque ; on trace le cercle de centre I inscrit dans ce triangle ainsi que les tangentes à ce cercle, parallèles aux côtés du triangle ABC. On construit ainsi l'hexagone DEFGKL.



On note a, b et c les longueurs des côtés du triangle ABC et $\rho = \dfrac{\text{périmètre}(\text{DEFGKL})}{\text{périmètre}(\text{ABC})}$.

Déterminer ρ en fonction des longueurs a, b et c puis montrer que $\rho \leq 2/3$.
Peut-on avoir $\rho = 2/3$?

Retour au sommaire

SOLUTION PROBLÈME 159
RÉGIONNEMENT

Proposé par Fabien Lombard

On se donne cinq points en « situation générale » : trois quelconques sont non alignés et quatre quelconques sont non cocycliques.
Montrer qu'il existe un cercle passant par trois de ces points et qui sépare les deux autres (l'un est à l'intérieur de ce cercle, l'autre à l'extérieur)

Solution

L'idée de la résolution est de chercher une caractérisation des points intérieurs et extérieurs à un cercle. La notion de cocyclicité invite naturellement à une caractérisation en termes d'angles.

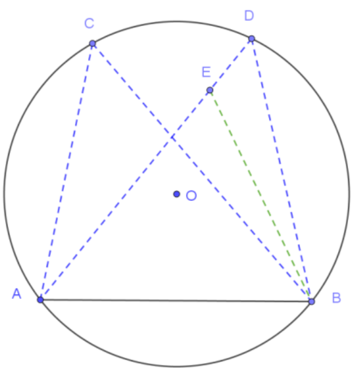


Fig 1

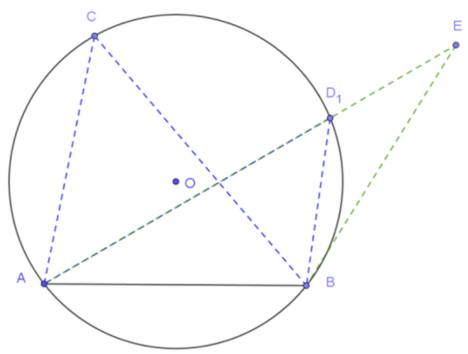


Fig 2

On considère le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à un triangle ABC et D un point de ce cercle. On considère, dans un même demi-plan défini par les points A et B, un point E qui n'appartient pas à ce cercle. Ce point est intérieur (Fig 1) ou extérieur (Fig 2) au cercle $\mathcal{C}$.
Dans le cas où E est intérieur au cercle $\mathcal{C}$ (Fig1), on note D le second point d'intersection de la droite (AE) avec le cercle $\mathcal{C}$. $\widehat{\text{AEB}}$ est supplémentaire à $\widehat{\text{DEB}}$ et par conséquent

$$\widehat{\text{AEB}} = \widehat{\text{EDB}} + \widehat{\text{DBE}} = \widehat{\text{ADB}} + \widehat{\text{DBE}}.$$

Or les points A,B,C et D sont cocycliques et sur le même arc délimité par A et B. Par conséquent $\widehat{\text{ADB}} = \widehat{\text{ACB}}$. On en déduit que $\widehat{\text{AEB}} = \widehat{\text{ACB}} + \widehat{\text{DBE}}$ et donc que $\widehat{\text{AEB}} > \widehat{\text{ACB}}$.
De la même manière, on montre que si E est extérieur au cercle $\mathcal{C}$, alors $\widehat{\text{AEB}} < \widehat{\text{ACB}}$. Puisqu'il n'y a que deux possibilités, nous avons entièrement caractérisé les points intérieurs et extérieurs au cercle et se situant dans le même demi-plan défini par A et B.
Revenons au problème posé. En considérant l'enveloppe convexe des cinq points, on peut en choisir deux que l'on nommera A et B tels que les trois autres points soient du même côté de la droite (AB). On peut nommer les trois autres points A_1, A_2 et A_3 en ordonnant les angles $\widehat{\text{AA}_i\text{B}}$ de telle manière que $\widehat{\text{AA}_1\text{B}} < \widehat{\text{AA}_2\text{B}} < \widehat{\text{AA}_3\text{B}}$.
Chacune des inégalités est stricte car, d'après l'énoncé, aucun choix de quatre points ne donne des points cocycliques. De plus, d'après l'énoncé, les points A, A_2 et B ne sont pas alignés. On peut

Retour au sommaire

donc considérer le cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle AA_2B ; l'inégalité angulaire ci-dessus montre que le cercle $\mathscr{C}$ sépare les points A_1 et A_3.
Comme le fait remarquer Fabien Lombard, on peut considérer non pas 5 points mais, par exemple, 2025 et de manière générale tout entier de la forme $2n + 3$.

Retour au sommaire