ÉTUDE MATHÉMATIQUE

UNE RELATION MÉTRIQUE DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

Fathi Drissi

Collège Louis Armand, Moulins-Lès-Metz

À Jacques Verdier

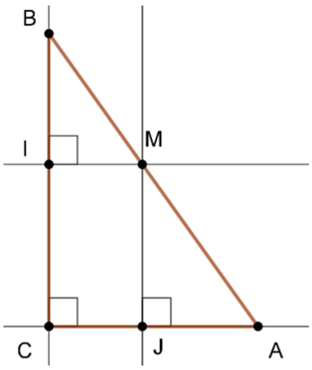
On se propose de démontrer, en s'appuyant sur les triangles semblables, une relation métrique dans un triangle rectangle et d'en déduire le théorème de Pythagore.

Propriété

Si un triangle ABC est rectangle en C, alors pour tout point M sur l'hypoténuse [AB], on a

$$AM \times MB = AJ \times JC + BI \times IC$$

avec I et J les projetés orthogonaux de M respectivement sur (BC) et sur (AC).

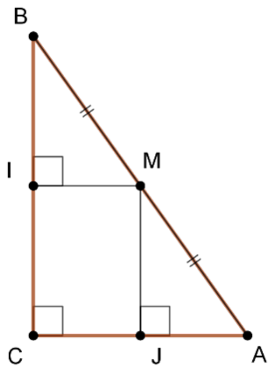


Preuve

Soient ABC un triangle rectangle en C, M un point de [AB], I son projeté orthogonal sur (BC) et J celui sur (AC). Ainsi, CJMI est un rectangle et on a : IC=JM et JC=IM. On mène la perpendiculaire à (AB) en M qui coupe (BC) en H.

Il est aisé de démontrer que les triangles rectangles AJM et BHM sont semblables. On en déduit que :

$$\frac{BH}{AM} = \frac{MB}{JM}$$



D'où : $AM \times MB = BH \times JM$

Par ailleurs, I étant le pied de la hauteur issue de M dans le triangle BHM rectangle en M, $I \in [BH]$, et on a $BH = BI + IH$. D'où : $AM \times MB = (BI + IH) \times JM$

Ou encore $AM \times MB = BI \times IC + IH \times JM$

De même, les triangles rectangles HIM et AJM sont semblables. Par conséquent :

$$\frac{IH}{AJ} = \frac{IM}{JM}$$

D'où : $IH \times JM = AJ \times IM$.

De plus, $JC = IM$, donc $AM \times MB = BI \times IC + AJ \times JC$.

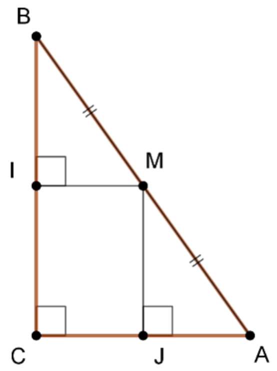
Retour au sommaire

Cas particulier

En appliquant cette propriété à un triangle ABC rectangle en C avec M milieu de [BC], on a :

$$\mathrm{AM} \times \mathrm{MB} = \mathrm{BI} \times \mathrm{IC} + \mathrm{AJ} \times \mathrm{JC}$$

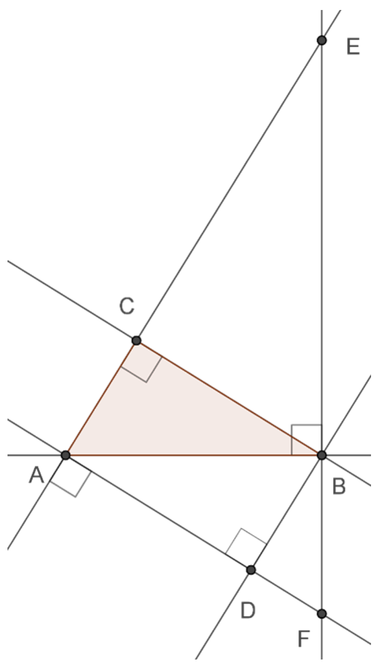
$$\mathrm{AM} = \mathrm{MB} = \frac{\mathrm{AB}}{2}$$



Les droites (BC) et (JM) étant perpendiculaires à (AC), elles sont parallèles.
De même, (AC) et (IM) sont parallèles. Donc, d'après la propriété de la droite des milieux, I et J sont les milieux respectifs de [BC] et de [AC].
Il en résulte que
$\mathrm{BI} = \mathrm{IC} = \frac{\mathrm{BC}}{2}$ et $\mathrm{AJ} = \mathrm{JC} = \frac{\mathrm{BC}}{2}$
D'où $\frac{\mathrm{AB}^2}{4} = \frac{\mathrm{AC}^2}{4} + \frac{\mathrm{BC}^2}{4}$ et ainsi $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2$
Ce qui permet de démontrer le théorème de Pythagore.

Une autre preuve du théorème de Pythagore consiste à appliquer le théorème de la moyenne géométrique et cette relation métrique à la figure ci-dessous.

Voici une autre preuve de ce théorème dans laquelle on exprime les longueurs AB, AC et BC comme moyenne géométrique de deux longueurs.
Soit ABC un triangle rectangle en C.



La perpendiculaire à (AB) en B coupe (AC) en E, la perpendiculaire à (AC) en A coupe (BE) en F et la perpendiculaire à (BC) en B coupe (AF) en D.
Les angles $\widehat{\mathrm{ABC}}$ et $\widehat{\mathrm{CBE}}$ tout comme les angles $\widehat{\mathrm{BAE}}$ et $\widehat{\mathrm{AEB}}$ sont complémentaires.
Il en résulte que $\widehat{\mathrm{BAC}} = \widehat{\mathrm{CBE}}$.
Ainsi, les triangles rectangles ABC et BCE ont deux paires d'angles homologues de même mesure. Ils sont donc semblables et par conséquent :

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BE}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CE}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}$$

D'où : $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AC} \times \mathrm{CE}$
BC est la moyenne géométrique de AC et CE.
De la même manière, on a : $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{FB} \times \mathrm{BE}$ et $\mathrm{AC}^2 = \mathrm{FD} \times \mathrm{DA}$
Et en appliquant la propriété donnée ci-dessus au triangle AEF rectangle en A, on a :

$$\mathrm{FB} \times \mathrm{BE} = \mathrm{AC} \times \mathrm{CE} + \mathrm{FD} \times \mathrm{DA}$$

Ou encore

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2$$

Retour au sommaire