PROBLÈME 159
RÉGIONNEMENT

Proposé par Fabien Lombard

Le responsable de cette rubrique est Philippe Févotte.
Envoyez lui vos propositions de solutions à ce problème (nous espérons en avoir une grande quantité), ainsi que toute proposition de nouveau problème.

On se donne cinq points en « situation générale » : trois quelconques sont non alignés et quatre quelconques sont non cocycliques.

Montrer qu'il existe un cercle passant par trois de ces points et qui sépare les deux autres (l'un est à l'intérieur de ce cercle, l'autre à l'extérieur)

SOLUTION PROBLÈME 158
ALGORITHME

Proposé par Fabien Lombard

Vous trouverez ci-dessous un algorithme écrit en langage Python.
Que calcule la fonction ragag ? Démontrez-le.

```
from math import *
def decoupe(N) :
    t=int(log10(N)+1)
    L=[]
    LR=[]
    R=0
    p=floor((t+1)/2)
    for i in range(p) :
        R=int(N%100)
        LR=[R]
        N=(N-R)/100
        L=LR+L
    return(L)
```

```
def NbI(N,debi) :
    imp=debi
    reste=N
    cpt=0
    der=0
    while reste-imp>0 or reste-imp==0 :
        der=imp
        reste=reste-imp
        imp=imp+2
        cpt=cpt+1
    return cpt,reste,der
```

Retour au sommaire

```
def ragag (N) :
    L=decoupe(N)
    reste=0
    debi=1
    rap=0
    for i in range(len(L)) :
        n=reste*100 + L[i]
        cpt,reste,der=NbI(n,debi)
        debi=(der+1)*10+1
        rap=rap*10+cpt
    return rap
```

Solution

Fabien Lombard a proposé une solution à cet exercice, dont l'énoncé est inspiré d'un article de la revue Tangente.

Cet algorithme, comme on peut le conjecturer sur quelques exemples, détermine une approximation à l'unité de la racine carrée d'un nombre.

Cette méthode a été mise au point en 1865 par August Toepler et publiée par Franz Reuleaux dans les *Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleißes in Preußen* la même année. Elle est spécialement créée pour rechercher une racine carrée à l'aide d'un arithmomètre dont Reuleaux était un ardent promoteur. Mais elle peut tout aussi bien s'effectuer à la main.

On lui donne parfois le nom d'extraction par la méthode du goutte à goutte car elle permet, petit à petit (goutte à goutte), d'obtenir les décimales successives d'une racine carrée uniquement à l'aide d'opérations simples : multiplication par 10, ajout de 1 et soustraction, toutes facilement manipulables sur une machine mécanique.

Algorithme

L'algorithme consiste à effectuer ces étapes :

1) Découper le nombre en tranches de 2 chiffres à partir de la droite, ce que calcule la fonction `decoupe`.

2) Prendre la tranche la plus à gauche et lui retrancher les nombres impairs successifs tant que cela est possible.

La fonction `NbI` demande d'entrer deux nombres, calcule la différence entre le premier nombre et la somme des impairs successifs, à partir du second nombre entré ; elle renvoie le nombre de termes soustraits, le reste en fin d'opération ainsi que le dernier impair soustrait.

La fonction `ragag` va déterminer la racine approchée de N ; dans un premier temps, elle découpe le nombre N en tranche de 2 chiffres, puis effectue les étapes ci-dessous.

Retour au sommaire

3) Le nombre de soustractions effectuées est le chiffre le plus à gauche de la racine.

4) Au résultat des soustractions effectuées à l'étape 2, coller la tranche suivante.

5) Prendre le dernier nombre impair utilisé, lui ajouter 1, multiplier par 10 et y ajouter 1.

6) Au nombre ainsi obtenu à l'étape 4, retrancher, tant que cela est possible, les nombres impairs à partir du nombre impair obtenu à l'étape 5 - Le nombre de soustractions effectuées est le chiffre suivant de la racine.

7) Recommencer à partir de l'étape 4.

Traitons un exemple

Cherchons une approximation de la racine carrée de 71 214 ; les trois tranches sont 7, 12 et 14.

$$7 - 1 - 3 = 3$$

2 opérations, le reste égal à 3 et le dernier nombre soustrait est 3. Dans l'étape suivante le premier impair soustrait sera $(3+1) \times 10 + 1 = 41$.

$$312 - 41 - 43 - 45 - 47 - 49 - 51 = 36$$

6 opérations, le reste égal à 36 et le dernier nombre soustrait est 51. Dans l'étape suivante le premier impair soustrait sera $(51+1) \times 10 + 1 = 521$

$$3614 - 521 - 523 - 525 - 527 - 529 - 531 = 458$$

6 opérations, et il n'y a plus de tranche « abaisser ».
On en déduit que $266 < \sqrt{71214} < 267$

Preuve de la démarche

L'algorithme est basé, d'une part, sur la propriété que la somme des n premiers nombres impairs (de 1 à $2n-1$) est n^2, et, d'autre part, sur le fait que lorsqu'on change de tranche (deux chiffres), cela correspond à un changement d'un chiffre pour la racine.

Remarquons que lorsqu'on a un nombre « à virgule », on peut se ramener à un nombre entier par un décalage de la virgule par tranche de deux chiffres : cela correspond à un décalage de la virgule d'un chiffre pour la racine carrée.

Appelons N un nombre entier dont on cherche la racine carrée.

Dans un premier temps

On sépare N en tranches de 2 chiffres à partir du chiffre des unités :
$N = \overline{A_0A_1A_2 \ldots A_k}$ où les $\overline{A_i}$ sont des tranches de 2 chiffres sauf éventuellement pour $\overline{A_0}$.
N ayant $(k+1)$ tranches de 2 chiffres, sa racine carrée sera composée de $(k+1)$ chiffres : $\overline{c_0c_1c_2 \ldots c_k}$. Le découpage par tranches de 2 chiffres va permettre de trouver des approximations par défaut successives de la racine carré de N à 10^{-i} près, pour i prenant les valeurs de k à 0.

Retour au sommaire

Dans un second temps

On trouve une approximation par défaut à l'unité de la racine carré de $\overline{A_0}$ en lui ôtant tous les entiers impairs de 1 à $2c_0 - 1$

On a ôté ainsi c_0 nombres impairs et on sait que $c_0^2 \leq A_0 < (c_0+1)^2$.

Dans un troisième temps

On met en place l'itération du processus.

Le résultat de la dernière soustraction est $d_0 = A_0 - c_0^2$. En collant la tranche suivante, on obtient $\overline{d_0A_1} = \overline{A_0A_1} - 100c_0^2$, soit le reste obtenu en soustrayant à $\overline{A_0A_1}$ tous les entiers impairs de 1 à $20c_0 - 1$.

L'entier impair suivant à ôter est $20c_0 + 1$, soit le dernier impair ôté à l'étape 2, $2c_0 - 1$, auquel on a ajouté 1, résultat qu'on a multiplié par 10 et auquel on ajoute de nouveau 1.

On trouve ainsi une approximation par défaut à l'unité de la racine carré de $\overline{A_0A_1}$ en ôtant à $\overline{d_0A_1}$ tous les entiers impairs à partir de $20c_0 + 1$ jusqu'à $20c_0 + 2c_1 - 1 = 2\overline{c_0c_1} - 1$

On a ôté ainsi c_1 nombres impairs supplémentaires et on sait que $\overline{c_0c_1}^2 \leq \overline{A_0A_1} < (\overline{c_0c_1}+1)^2$

On a ainsi recommencé le processus :

Le résultat de la dernière soustraction est $d_1 = \overline{A_0A_1} - \overline{c_0c_1}^2$. En collant la tranche suivante, on obtient $\overline{d_1A_2} = \overline{A_0A_1A_2} - 100\overline{c_0c_1}^2$ soit le reste obtenu en soustrayant à $\overline{A_0A_1A_2}$ tous les entiers impairs de 1 à $20\overline{c_0c_1} - 1$

L'entier impair suivant à ôter est $20\overline{c_0c_1} + 1$ soit le dernier impair ôté à l'étape précédente, $2\overline{c_0c_1} - 1$, auquel on a ajouté 1, résultat qu'on a multiplié par 10 et auquel on ajoute de nouveau 1, etc.

Si le dernier reste est nul et qu'il n'y a plus de tranche non nulle à coller, la racine carrée est exacte.

Références

Arithmomètre sur www.arithmometre.org

Article : Extraction, les grands algorithmes, revue Tangente 214

Retour au sommaire