PROBLÈME 158 : ALGORITHME

Proposé par Philippe Févotte

Le responsable de cette rubrique est Philippe Févotte.
Envoyez lui vos propositions de solutions à ce problème (nous espérons en avoir une grande quantité), ainsi que toute proposition de nouveau problème.

Vous trouverez ci-dessous un algorithme écrit en langage Python.
Que calcule la fonction ragag ? Démontrez-le.

```
from math import *
def decoupe(N) :
    t=int(log10(N)+1)
    L=[]
    LR=[]
    R=0
    p=floor((t+1)/2)
    for i in range(p) :
        R=int(N%100)
        LR=[R]
        N=(N-R)/100
        L=LR+L
    return(L)
```

```
def NbI(N,debi) :
    imp=debi
    reste=N
    cpt=0
    der=0
    while reste-imp>0 or reste-imp==0 :
        der=imp
        reste=reste-imp
        imp=imp+2
        cpt=cpt+1
    return cpt,reste,der
```

```
def ragag (N) :
    L=decoupe(N)
    reste=0
    debi=1
    rap=0
    for i in range(len(L)) :
        n=reste*100 + L[i]
        cpt,reste,der=NbI(n,debi)
        debi=(der+1)*10+1
        rap=rap*10+cpt
    return rap
```

Le code est disponible dans le fichier Python.

Retour au sommaire

SOLUTION PROBLÈME 157
SÉPARER 2024 POINTS

Proposé par Fabien Lombard

On se donne un nuage de 2 024 points du plan. Peut-on tracer une droite Δ qui partage ce nuage en deux sous-nuages contenant chacun 1 012 points ?

Solution :

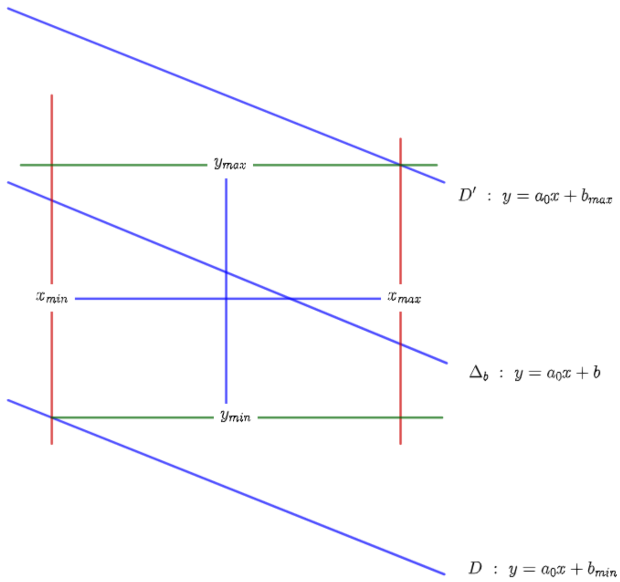
Cet exercice n'a pas eu de succès, aucune réponse n'a été proposée. Les 2024 points définissent, deux à deux, au plus $\binom{2024}{2}$ droites distinctes notées D_1, D_2, D_3, … D_N.

On se place dans un repère affine du plan. Pour toute valeur de $i = 1, 2, \dots, N$, chacune des droites D_i est associée à une pente a_i. Soit a_0 un réel négatif différent de chacun des a_i .

L'idée de la démonstration est de « balayer » le plan par des droites de pentes a_0 et de choisir une droite convenable.

On note A_1 , A_2, ,…., A_{2024} les 2024 points de coordonnées (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_{2024}, y_{2024}) et $x_{min} = \min(x_1, x_2, \dots, x_{2024})$ et $x_{max} = \max(x_1, x_2, \dots, x_{2024})$; on définit de même y_{min} et y_{max}.

Les points A_i sont contenus dans le pavé P associé à $[x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}]$



Si $b < b_{min}$ ou $b > b_{max}$ alors $\Delta_b \cap P = \emptyset$

Si $b_{min} \leq b \leq b_{max}$ alors $\Delta_b \cap P = \emptyset$ ou un singleton

En effet dans le cas contraire, Δ_b passerait par au moins deux points distincts de P, ce qui contredit le choix de a_0.

Soit $b_1' = \text{Inf}\{b / \Delta_b \cap P \neq \emptyset\}$; on définit la suite $b_i' = \text{Inf}\left\{b > b_{i-1}' \text{ et } \Delta_b \cap P \neq \emptyset\right\}$

Toute valeur de b telle que $b_{1012} \leq b \leq b_{1013}$ répond à la question.

Remarque : par cette procédure, on peut séparer, pour toute valeur de k inférieure ou égale à 2024, le nuage de points en deux nuages contenant respectivement k et 2024 – k points.

Retour au sommaire