INFINI(S)

Didier Lambois

« *Mais que diable allait-il faire dans cette galère ?* » s'exclame Géronte dans les *Fourberies de Scapin*[1], à plusieurs reprises, et c'est ce que je me suis dit aussi, plusieurs fois, en écrivant cet article sur l'infini. Que suis-je venu faire dans cette galère ? Pourquoi vouloir définir l'infini qui par définition n'est pas fini donc pas défini ? Par quel bout prendre ce concept qui n'a pas de bout ? Comment en viendrai-je à bout ?

Pourtant, s'il est un concept que nous utilisons souvent c'est bien celui d'infini, surtout en mathématiques et en philosophie. Essayons donc d'y voir plus clair.

Lorsque les philosophes et les mathématiciens parlent d'infini, parlent-ils d'un même infini ? Lorsque Descartes affirme que « Dieu seul est infini » faut-il l'entendre comme un mathématicien qui affirme que l'ensemble des nombres est infini ? Lorsque Pascal parle de l'infiniment petit n'est-il pas en même temps philosophe et mathématicien ? Mais si l'univers est infini… c'est grand !

L'infini potentiel

L'idée commune à toutes ces occurrences c'est toujours l'idée d'absence de limites[2] ; l'infini n'est pas borné, et parler de Dieu en disant qu'il n'est pas infini ce serait blasphémer. Dieu est par définition infini, ses qualités sont infinies, que ce soit la puissance, la sagesse, l'amour… Non ! Dieu ne peut pas être borné, il est infini, ou peut-être devrions-nous dire « absolu ».

Mais j'entends déjà quelques incrédules crier que pour que Dieu soit infini il faudrait qu'il existe, et je préfère ne pas m'embarquer dans cette question, une galère suffit. Contentons-nous de faire remarquer aux mathématiciens que l'existence des ensembles infinis est tout aussi problématique. Pouvez-vous me montrer un ensemble infini ? Vous pouvez le penser, vous pouvez le nommer, le définir, vous pouvez même le construire, mais existe-il vraiment, réellement ? L'ensemble des entiers naturels semble exister, nous l'utilisons tous les jours, 1, 2, 3... mais si vous voulez affirmer que c'est un ensemble infini vous devrez reconnaître qu'il n'est infini que potentiellement et qu'il ne sera jamais « actualisé », jamais réalisé (du latin *res*, chose) totalement. Nous voilà face à un infini aussi inatteignable que peut l'être Dieu.

Faut-il alors affirmer, comme Aristote (384-322 av. J.-C.), que l'infini n'existe que potentiellement ?

« *l'infini en acte, effectif et concret, ne peut se réaliser dans la nature, et l'infini en puissance, celui que peuvent imaginer les hommes, (est) le seul à exister* » Aristote, Physique, III.

Aristote ne remet pas en cause le fait qu'il soit nécessaire, parfois, de penser l'infini (nous pouvons ajouter ou diviser à l'infini) et nous pouvons toujours avancer vers l'infini : un pas, puis un autre

1. Molière, *Les Fourberies de Scapin*, acte II, scène 7.
2. Avec le privatif *in*, le mot « infini » est dérivé du verbe *finire*, limiter, qui a donné aussi « définir », délimiter. Mais *finire* signifiait également « achever », finir, et ce qui est in-fini serait donc inachevé, non définissable, indéfini.

Retour au sommaire

pas, et je ne m'arrête pas… Mais si nous pouvons le penser, l'imaginer, cela ne lui donne pas pour autant une existence réelle, en acte, actuelle. Cette distinction acte/puissance permet à Aristote d'évacuer les problèmes posés par Zénon et ses paradoxes. Le paradoxe de la dichotomie[3] n'en n'est plus un : il y a, certes, une infinité de semi-distances à parcourir avant de parvenir à un point donné, mais c'est une infinité en puissance.

Aristote laisse aux mathématiciens le plaisir de jouer avec cet infini qui ne correspond à rien de réel, et les mathématiciens ne s'en privent pas. Les pythagoriciens avaient déjà commencé depuis de nombreuses années. Alors qu'ils espéraient pouvoir rendre compte du monde par le nombre, et exprimer tous les rapports de grandeurs par le quotient de deux nombres entiers, ils découvrent qu'il existe des quantités incommensurables, des grandeurs non exprimables par le *ratio* de deux entiers : les irrationnels. Euclide et d'autres montreront que pour définir ces irrationnels il faut des suites illimitées de nombres rationnels, c'est infini[4].

L'apparition du calcul infinitésimal renvoie aussi les mathématiciens à l'infini, l'infiniment petit, l'évanescent ; paradoxalement, la notion même de limite renvoie également à un processus infini, illimité, puisqu'il reste toujours un petit quelque chose, et c'est précisément dans ce petit rien que réside l'infini. L'effort de Cauchy[5] pour en finir avec l'interminable, grâce à cette notion de limite, illustre bien cette idée que nous sommes toujours dans l'infini potentiel, un infini possible.

L'infini actuel

« *De l'audace, encore de l'audace…* »[6] il en aura fallu à Cantor (1845-1918) pour oser rompre avec cette tradition qui cantonnait les mathématiques à l'infini potentiel. Même si certains penseurs, comme Bolzano (1781-1848) ou Leibniz (1646-1716), avaient voulu ouvrir la voie, la résistance était énorme. Le prince des mathématiciens l'exprimait avec force :

« Je conteste qu'on utilise un objet infini comme un tout complet ; en mathématiques, cette opération est interdite ; l'infini n'est qu'une façon de parler. »

Cantor n'en convient pas, il ne veut plus considérer l'infini comme étant seulement une limite inatteignable, une quantité indéterminée susceptible de croître ou de décroître indéfiniment, va-

3. On nomme ainsi différents paradoxes qui montrent que pour parcourir une distance donnée en un temps fini, il faut d'abord parcourir la moitié de cette distance, puis la moitié de la distance restante, puis encore la moitié etc. Si la distance est divisible à l'infini il sera impossible de parcourir une infinité de positions en un temps fini. Achille qui veut rattraper la tortue est confronté au même problème ! Mais si le temps et l'espace étaient composés d'éléments indivisibles à l'infini, une flèche serait à chaque instant immobile dans un espace donné, donc toujours immobile… Décidément, en voulant donner raison à son maître Parménide, Zénon dérange autant les partisans du divisible que ceux de l'indivisible, les partisans du continu comme ceux du discret.

4. Dans sa géométrie, Euclide joue aussi avec l'infini. Le deuxième postulat de ses *Éléments* l'indique clairement : *Un segment de droite peut être prolongé indéfiniment en une ligne droite*.

5. Augustin Louis Cauchy (1789-1857) est sans conteste l'un des plus grands mathématiciens du XIXème siècle. Monarchiste antilibéral et catholique fervent, il est aussi le fondateur de nombreuses œuvres charitables, et il est préférable d'oublier qu'il fut beaucoup moins charitable envers les travaux d'Evariste Gallois (1811-1832) et de Niels Abel (1802-1829). Abel disait pourtant de Cauchy : « *il est celui qui sait le mieux comment il faut faire des mathématiques* ». Mais le maître négligea les manuscrits de Abel, et ce dernier mourut dans la misère, à 26 ans, sans jamais avoir obtenu de poste de son vivant. Ce n'est que deux jours après sa mort qu'Abel reçut une lettre de son ami Crelle (fondateur d'une revue de mathématiques où Abel publiait des articles), lettre qui lui annonçait qu'il avait enfin un poste de professeur à Berlin et qui se terminait par cette jolie formule : « tu n'auras plus à te soucier de ton avenir ».

6. La formule est de Danton qui, dans un discours du 2 septembre 1792, cherche à mobiliser les Français contre l'avancée des troupes austro-prussiennes qui viennent de prendre Verdun le 30 août.

Retour au sommaire

riable, il veut et il faut, selon lui, regarder l'infini comme une chose en soi, déterminée, constante, qui dépasse en grandeur toute quantité finie de même nature.

Pour exemple, l'ensemble des nombres entiers, dont nous parlions ci-dessus, est à ses yeux une chose en soi, c'est un ensemble déterminé, fixe (quand bien même nous ne finirons jamais d'énumérer les nombres qui le constituent), c'est une quantité bien plus grande que tout nombre entier, mais qui forme un tout. Cet ensemble est infini, mais est-ce le même infini que l'infini de l'ensemble des nombres réels ? Les entiers semblent former un ensemble infini dénombrable et discret ; les réels semblent indénombrables[7] et forment un ensemble continu. Il y a bien plus de réels que d'entiers naturels, tout comme il y a deux fois plus d'entiers que de nombres pairs, Ibn Quura (836-901) et Galilée (1564-1642) l'avaient déjà remarqué, mais ils sont pourtant en nombre infini. Il y a donc des infinis plus ou moins grands… des ensembles qui n'ont pas la même puissance, le même cardinal[8]. Mais est-il possible d'établir une correspondance[9] entre les éléments des uns et les éléments des autres, et de fait une correspondance entre le discret et le continu ? Est-il possible d'établir une bijection entre les éléments d'un segment de droite (le coté d'un carré) et les éléments d'une surface… ? etc.

Voilà le genre de questions qui alimentent la correspondance, les lettres échangées entre Cantor et Richard Dedekind[10], grand mathématicien qu'il avait rencontré en 1872. Grâce à eux il est possible aujourd'hui de raisonner tout autant sur l'infini (puisqu'il existe réellement) que sur le fini. La théorie des ensembles constitue de ce fait un tournant important de l'histoire des mathématiques[11].

7. On qualifie de dénombrable un ensemble infini dont les éléments peuvent être mis en correspondance biunivoque (bijection) avec les nombres naturels. Cantor démontrera l'indénombrabilité de **R** à deux reprises, d'abord en 1874 avec la méthode des segments emboîtes, puis en 1891 par la méthode de la diagonale.

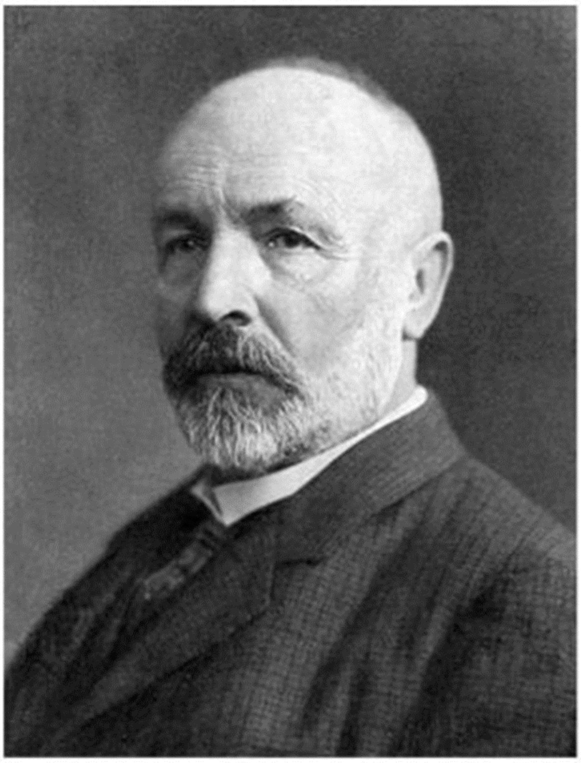
8. Le cardinal d'un ensemble est le nombre d'éléments de cet ensemble, considérés indépendamment de leur ordre.

9. C'est le mot employé par Cantor. Le terme de « bijection » sera utilisé ultérieurement.

10. C'est à Richard Dedekind (1831-1916) que l'on doit la définition d'un ensemble infini : ensemble qui peut être mis en bijection avec une de ses parties propres. La correspondance entre Cantor et Dedekind sera publiée en 1937 par Jean Cavaillès et Emmy Noether. La teneur de cet échange épistolaire peut nous faire regretter de communiquer aujourd'hui via internet !

11. Pour être plus précis et aller plus loin, de façon claire et abordable, on peut commencer par lire l'article de Patrick Dehornoy, *Cantor et les infinis*, en ligne sur bibnum.

Retour au sommaire

Georg Cantor (à droite) face à celui qui fut l'un des opposants les plus farouches de la théorie des ensembles, Léopold Kronecker (1823-1891).

« Je le vois, mais je ne le crois pas »

« Je le vois, mais je ne le crois pas », c'est ce qu'écrit Cantor quand il découvre que l'ensemble des points d'une surface possède la même taille que l'ensemble des points d'un segment de droite, mais cette formule résume assez bien l'étonnement, la stupeur, l'effroi que nous pouvons avoir face à l'infini. Nous sommes dépassés par l'infini et face à lui notre entendement montre qu'il est fini. La première antinomie[12] de Kant (1724-1804) illustre bien cette impuissance de notre raison. Nous n'arrivons pas à penser que le monde puisse être infini, tant dans l'espace que dans le temps (mais nous n'arrivons pas à penser non plus qu'il puisse être fini).

« Je le crois, mais je ne le vois pas ». Cette formule pourrait être celle de ceux qui croient en Dieu, mais ne conviendrait-elle pas aussi face à l'infini qui nous échappe toujours ? L'infini nous embarque toujours sur des océans où il n'y a plus d'horizons, quelle galère !

Car enfin qu'est-ce que l'homme dans la nature ? Un néant à l'égard de l'infini, un tout à l'égard du néant, un milieu entre rien et tout. Infiniment éloigné de comprendre les extrêmes, la fin des choses et leur principe sont pour lui invinciblement cachés dans un secret impénétrable, également incapable de voir le néant d'où il est tiré, et l'infini où il est englouti. Pascal, *Pensées*

12. Dans *La Critique de la Raison Pure*, les antinomies (contradictions) sont utilisées par Kant pour montrer les limites de notre raison et nous faire sortir, comme il le dit, de « notre sommeil dogmatique », de cette illusion confortable et dangereuse qu'est l'illusion de savoir.

Retour au sommaire