PROBLÈME 157

SÉPARER 2024 POINTS

Proposé par Fabien Lombard

On se donne un nuage de 2 024 points du plan. Peut-on tracer une droite Δ qui partage ce nuage en deux sous-nuages contenant chacun 1 012 points ?

Le responsable de cette rubrique est Philippe Févotte.
Envoyez lui vos propositions de solutions à ce problème (nous espérons en avoir une grande quantité), ainsi que toute proposition de nouveau problème.

SOLUTION DU PROBLÈME 156

PROJECTIONS

Solution proposée par Fabien Lombard

Problème proposé par Jacques Verdier

On se donne trois nombres strictement positifs x, y et z.
Peut-on tracer un triangle ABC dont les médianes ont pour longueurs respectives les nombres x, y et z ?

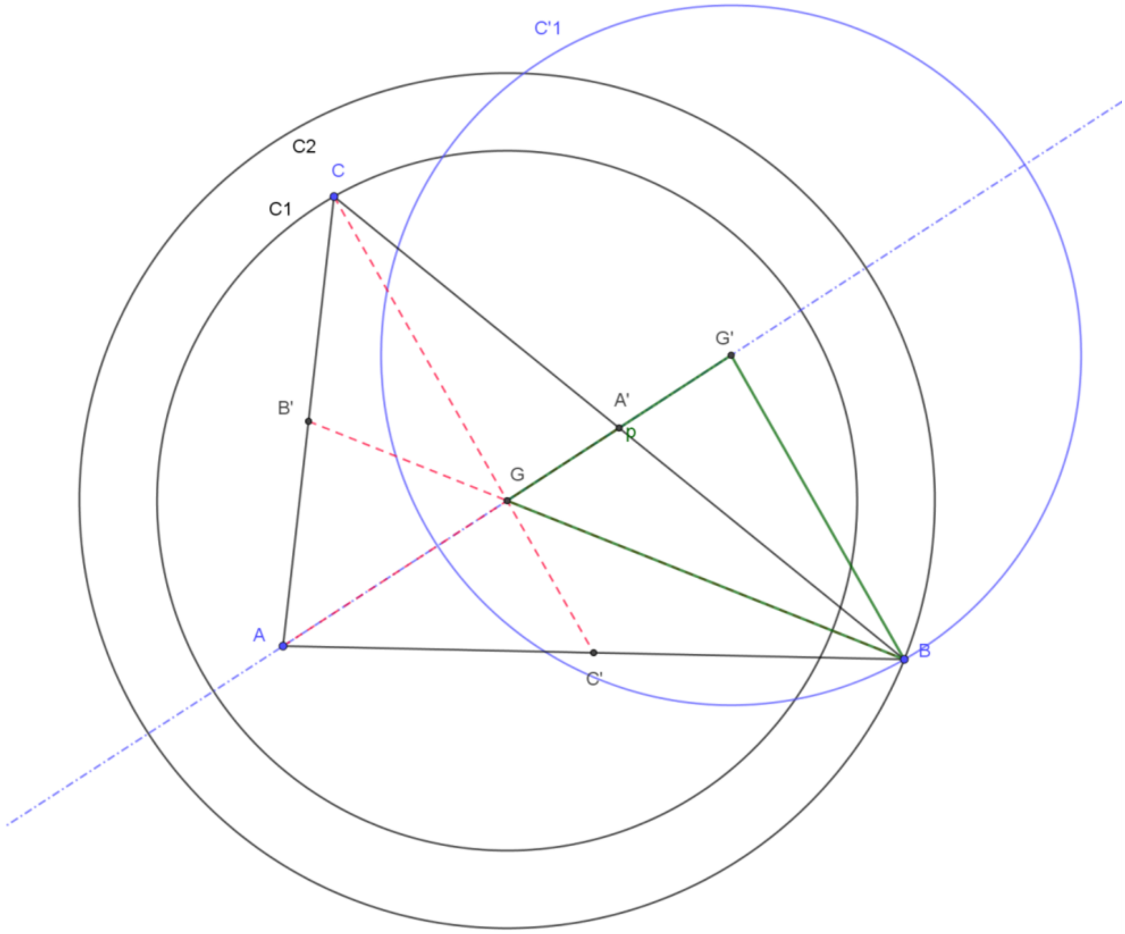
Solution (proposée par Fabien Lombard)

Analyse du problème

Soit un triangle ABC de centre de gravité G et dont les médianes AA', BB' et CC' ont pour longueur respective les nombres x, y et z.
Soient C_1 et C_2 les cercles de centre G passant respectivement par C et B et G' le symétrique de G par rapport à A'.
On note C_1' le symétrique du cercle C_1 par rapport à A'.
$B = s_{A'}(C)$ et $C \in C_1$ donc $B \in C_1'$; donc $B \in C_2 \cap C_1'$, et par conséquent dans le triangle BGG' on a $GG' \leq G'B + GB$.
A' est le milieu commun à (B, C) et (G, G'), donc $GBG'C$ est un parallélogramme et par conséquent $G'G = 2 \times GA' = \dfrac{2}{3}x$; $G'B = GC = \dfrac{2}{3}z$ et $GB = \dfrac{2}{3}y$.

Retour au sommaire

On en déduit que $\frac{2}{3}x \leq \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z$, soit $x \leq y + z$.



Synthèse

Supposons que les nombres x, y et z vérifient l'inégalité triangulaire

$$2\,\text{sup}\ (x, y, z) \leq x + y + z$$

On peut tracer un triangle noté $GG'B$ tel que les distances GG', GB et $G'B$ soient respectivement égales à x, y et z.

On construit alors $A = s_G(G')$, A' le milieu de (G, G') et $C = s'_A(B)$.

On vérifie aisément que le triangle ABC ainsi construit répond à la question posée.

En conclusion le problème a une solution si et seulement si les trois nombres x, y et z vérifient l'inégalité triangulaire.

Retour au sommaire