PROBLÈME 156
MÉDIANES

Proposé par Jacques Verdier

On se donne trois nombres strictement positifs x, y et z.
Peut-on tracer un triangle ABC dont les médianes ont pour longueurs respectives les nombres x, y et z ?

SOLUTION DU PROBLÈME 155
TOUTES LES FACES

Proposé par Jacques Choné

Problème proposé par Philippe Févotte

Un jeu consiste à lancer un dé tétraédrique, de faces numérotées de 1 à 4, autant de fois que nécessaire jusqu'à obtenir toutes les faces de 1 à 4. Si on réussit à obtenir toutes les faces en 8 coups ou moins, on gagne 2 euros ; sinon on perd 1 euro.
Quelle est l'espérance de gain à ce jeu ?

Solution proposée par Jacques Choné

Notons X le gain étudié
et A_i l'événement : « au cours des 8 lancers, on n'a pas obtenu la face i ».
Il n'y a que deux éventualités pour X et le plus simple est de calculer la probabilité de l'événement « $X = -1$ ».
On a « $X = -1$ » $= A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$.
Par la formule du crible, on en déduit, pour des indices variant de 1 à 4 :

$$P(X = -1) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i,j \text{ et } i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i,j,k \text{ et } i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

Or
$p(A_i) = (\frac{3}{4})^8$ comme probabilité d'une succession d'événements indépendants de probabilité $\frac{3}{4}$.
De même

$$P(A_i \cap A_j) = (\frac{2}{4})^8,\ P(A_i \cap A_j \cap A_k) = (\frac{1}{4})^8$$

et évidemment $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 0$

En dénombrant chacun des cas, on obtient

$$P(X = -1) = 4(\frac{3}{4})^8 - 6(\frac{2}{4})^8 + 4(\frac{1}{4})^8$$

On en déduit que

$$P(X = 2) = 1 - (4(\frac{3}{4})^8 - 6(\frac{2}{4})^8 + 4(\frac{1}{4})^8)$$

et par conséquent

$$E(X) = 2 - 2(4(\frac{3}{4})^8 - 6(\frac{2}{4})^8 + 4(\frac{1}{4})^8) - (4(\frac{3}{4})^8 - 6(\frac{2}{4})^8 + 4(\frac{1}{4})^8)$$

soit

$$E(X) = 2 - 12(\frac{3}{4})^8 + 18(\frac{2}{4})^8 - 12(\frac{1}{4})^8 = \frac{7117}{8192} \simeq 0,868774.$$

Jacques Choné propose également un programme en langage Python qui simule cette expérience.

```
import random
def exp(n):
    p=0
    for i in range(n):
        u=[random. randint (1 ,4) for j in range(8)]
        i f 1 in u and 2 in u and 3 in u and 4 in u:
            p+=1
    return((p/n) *2−(n−p)/n)
```

Ce qui donne pour résultats : exp(10**6) –> 0.868304 ; exp(10**7) –> 0.8686661

Des prolongements

On peut déterminer la loi d'attente T de la première obtention des quatre faces 1, 2, 3 et 4 et en déduire ensuite l'espérance de gain à ce jeu.

Cette loi peut être déterminée de deux manières :

- En s'inspirant de ce qui a été calculé précédemment.

On note $A_{(i,n)}$ l'événement « au cours de n lancers, on n'a pas obtenu la face i ».

On a évidemment $P(T=n)=0$ pour les valeurs de $n \leq 3$ et

$$P(T=n)=P(T\geq n)-P(T\geq n+1)$$

Or

$$P(T\geq n)=P\left(\bigcup_{i=1}^{4}A_{i,n-1}\right)=\sum_{i}P(A_{i,n-1})-\sum_{i,j\ et\ i<j}P(A_{i,n-1}\cap A_{j,n-1})+$$

$$\sum_{i,j,k\ et\ i<j<k}P(A_{i,n-1}\cap A_{j,n-1}\cap A_{k,n-1})-P(A_{1,n-1}\cap A_{2,n-1}\cap A_{3,n-1}\cap A_{4,n-1}).$$

Or

$$P(A_{i,n-1})=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1},\ P(A_{i,n}\cap A_{j,n})=\left(\frac{2}{4}\right)^{n-1},\ P(A_{i,n}\cap A_{j,n}\cap A_{k,n})=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

et

$$P(A_{1,n-1}\cap A_{2,n-1}\cap A_{3,n-1}\cap A_{4,n-1})=0$$

D'où

$$P(T\geq n)=4\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-6\left(\frac{2}{4}\right)^{n-1}+4\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

Et par conséquent

$$P(T=n)=4\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-6\left(\frac{2}{4}\right)^{n-1}+4\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-\left(4\left(\frac{3}{4}\right)^{n}-6\left(\frac{2}{4}\right)^{n}+4\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right)$$

Soit $P(T=n)=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-3\left(\frac{2}{4}\right)^{n-1}+3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

- En dénombrant les différents n-uplets possibles.

L'événement $T = 4$ est réalisé si on a obtenu en quatre lancers dans un ordre quelconque toutes les faces, ce qui correspond aux quadruplets formés des nombres 1, 2 , 3 et 4. Il y en a 4 ! sur les 4^4 quadruplets possibles. Donc $P(T = 4) = \frac{24}{256} = \frac{3}{32}$.

L'événement $T = 5$ est réalisé si on a obtenu en cinq lancers un double. Supposons qu'au lancer 5, on a obtenu la face 4 pour la première fois. On a 3 doubles possibles et $\binom{4}{2}$ façons de placer ce double, puis 2 ! possibilités de placer les deux autres faces. On obtient ainsi $3 \times \binom{4}{2} \times 2!$ soit 36 quintuplets.

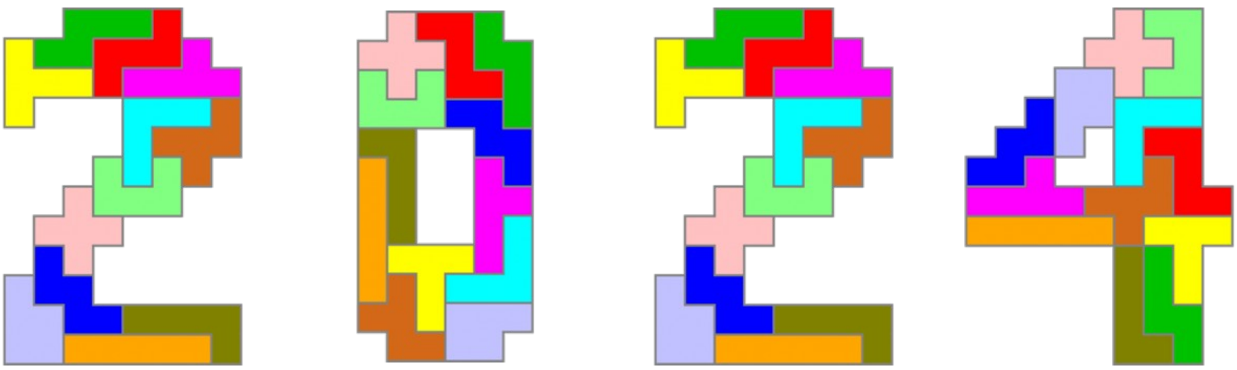
En reprenant le même raisonnement avec les faces 1, 2 ou 3 obtenues pour la première fois au lancer 5, on obtient que $P(T = 5) = 4 \times \frac{36}{1024} = \frac{9}{64}$. Si on note N_i le nombre de faces i obtenues en n lancers, en envisageant les nombres possibles qui vérifient

$$N_1 + N_2 + N_3 = n - 1,$$

et en suivant un raisonnement semblable à celui développé précédemment, on peut déterminer $P(T = n)$ mais cela peut devenir laborieux !

Cet exercice est, sous une autre présentation, celui assez connu des « collections » ; on peut en trouver par exemple un développement et une généralisation dans l'excellent livre « En passant par hasard... » de Gilles Pagès et Claude Bouzitat.

MEILLEURS VŒUX



Nos voisins et amis allemands s'associent aux joueurs et joueuses de notre régionale pour faire vivre des envies de Pentaminos en 2024.

Retour au sommaire