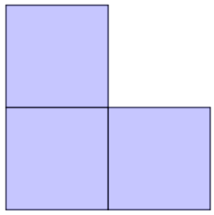
ÉTUDE MATHÉMATIQUE

PAVER DES RECTANGLES AVEC DES L-TRIOMINOS

Fathi Drissi

Un L-triomino est un assemblage de trois carrés superposables et accolés par un côté.

En Lorraine, ils sont appelés ”Petit L”.



Proposition 1

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, il est possible de paver un rectangle $6 \times n$ avec des L-triominos.

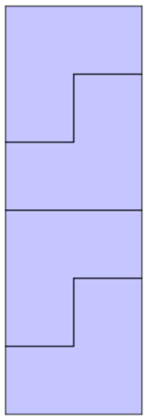
Preuve

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Pour montrer qu'un rectangle $6 \times n$ peut être pavé par des L-triominos, on va montrer qu'il est formé de rectangles 3×2 et de rectangles 2×3. Puisque ces rectangles peuvent être pavés par des L-triominos, le grand rectangle le sera aussi.

On distingue deux cas selon la parité de n.

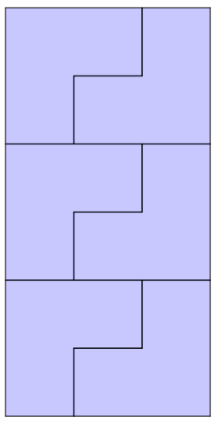
Premier cas : n est pair

Il existe un entier p strictement positif tel que $n = 2p$.
Un rectangle $6 \times 2p$ peut donc être pavé à l'aide de p rectangles 6×2.
Or, un rectangle 6×2 est formé de 4 L-triominos comme l'indique la figure ci-contre.
Il s'en suit qu'un rectangle $6 \times 2p$ peut être pavé à l'aide de $4p$ L-triominos.



Deuxième cas : n est impair

Il existe un entier p strictement positif tel que $n = 2p+1$. Puisque $2p+1 = 2(p-1)+3$, un rectangle $6\times(2p+1)$ peut être découpé en $p-1$ rectangles 6 × 2 et un rectangle 6 × 3. Or, un rectangle 6 × 3 est formé de 6 L-triominos et comme on l'a vu précédemment, un rectangle 6 × 2 est formé de 4 L-triominos. Donc, un rectangle $6 \times (2p+1)$ peut être pavé à l'aide de $4(p-1)+6$ soit $4p+2$ L-triominos.



Proposition 2

Soient n et m deux entiers supérieurs ou égaux à 4. On peut paver un rectangle $n \times m$ avec des L-triominos si, et seulement si, n ou m est un multiple de 3.

Preuve Soient n et m deux entiers supérieurs ou égaux à 4.
On suppose que les rectangles $n \times m$ peuvent être pavés avec des L-triominos. Un tel rectangle est formé de mn cases et puisque un L-triomino est composé de 3 cases, alors le produit mn est un multiple de 3. Le nombre 3 étant premier, d'après le lemme d'Euclide, 3 divise m ou n.

Réciproquement, on suppose que n ou m est un multiple de 3 et on va montrer que les rectangles $n \times m$ peuvent être pavés avec des L-triominos. On peut se limiter à l'étude du cas où n est un multiple de 3 puisque les rectangles $n \times m$ et $m \times n$ sont superposables par une rotation d'angle $\pi/2$.
On suppose que n est divisible par 3.

Premier cas : n est pair

Dans ce cas, n est un multiple de 6 et il existe un entier q strictement positif tel que $n = 6q$. Il s'en suit que tout rectangle $n \times m$ peut être découpé en q rectangles $6 \times m$ et d'après la proposition 1, il peut être pavé par des L-triominos.
Deuxième cas : n est impair
Il existe un entier k strictement positif et impair tel que $n = 3k$.

On peut distinguer deux cas selon la parité de m.

- m est pair :
  Il existe alors un entier h strictement positif tel que $m = 2h$. Il s'en suit que tout rectangle $n \times m$ peut être découpé en $k \times h$ rectangles 3×2 et donc pavable par des L-triominos.

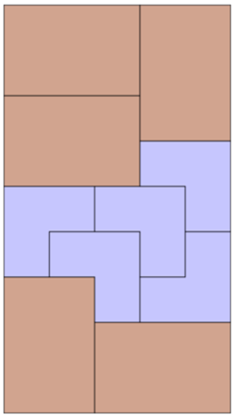
- m est impair :
  L'entier n étant un multiple impair de 3 et supérieur ou égal à 4, il existe un entier naturel a tel que $n = 9 + 6a$. Et puisque m est un entier impair supérieur ou égal à 4, il existe un entier naturel b tel que $m = 5 + 2b$.

Or, on a :

$$(9 + 6a)(5 + 2b) = 9 \times 5 + 9 \times 2b + 6a \times 5 + 6a \times 2b$$

Ou encore :

$$(9 + 6a)(5 + 2b) = 9 \times 5 + 6 \times 3b + 6 \times am$$



Donc, tout rectangle $(9+6a)\times(5+2b)$, avec a et b strictement positifs, peut être découpé en trois rectangles : un rectangle 9×5, un rectangle $6 \times 3b$ et un rectangle $6 \times am$.

D'après la proposition 1, les rectangles $6\times3b$ et $6\times am$ peuvent être pavés par des L-triominos.

De plus, un rectangle 9×5 peut être pavé avec des L-triominos comme l'indique le dessin ci-contre où chaque rectangle brun est un rectangle 3×2 qui peut être pavé par deux L-triominos.

Si a ou b est nul, le rectangle $9 \times (5 + 2b)$ ou le rectangle $(9 + 6a) \times 5$ peut être découpé en deux rectangles : un rectangle 9×5 et un rectangle $6 \times 3b$ ou un rectangle 9×5 et un rectangle $6 \times 5a$. Dans les deux cas, les deux rectangles peuvent être pavés avec des L-triominos.

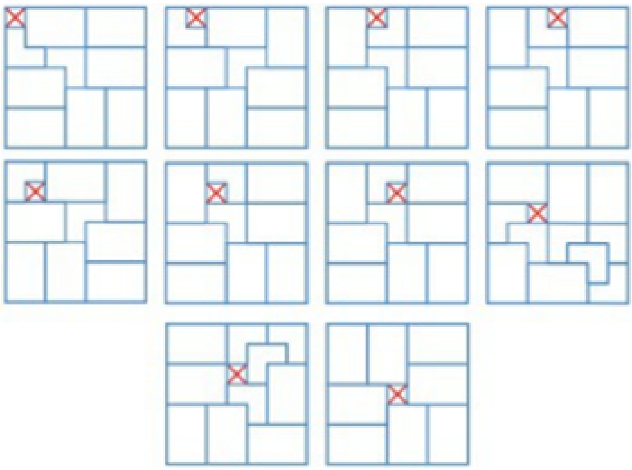
Question

Soient k un entier strictement positif et un carré $(6k + 1) \times (6k + 1)$.
On pose un monomino (composé d'un seul carré) sur une des $(6k + 1)^2$ cases.
Est-il possible de paver les cases restantes par des L-triominos ?

Quelle que soit la case sur laquelle on pose le monomino, le reste du carré $(6k + 1) \times (6k + 1)$ est toujours pavable par des L-triominos.
On va démontrer par récurrence que si l'on pose un monomino sur un carré $(6k+1) \times (6k+1)$, on peut toujours paver le reste du carré par des L-triominos.

- Pour $k = 1$ (voir Petit Vert n° 124)

  À une symétrie ou une rotation près du carré 7×7, il y a dix positions possibles pour le monomino. Pour chacune de ces positions, on peut paver le reste du carré par des L-triominos.

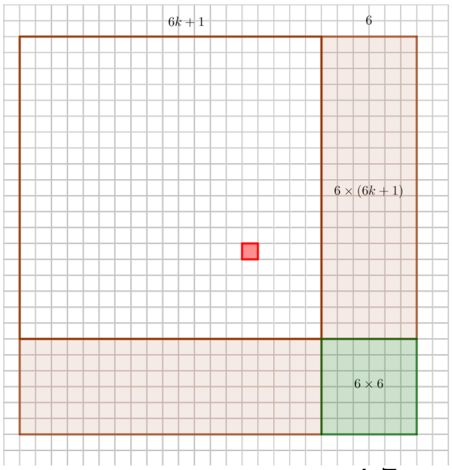


- Supposons le cas du carré $(6k + 1) \times (6k + 1)$ démontré, et posons un monomino sur un carré $(6(k + 1) + 1) \times (6(k + 1) + 1)$.

  On peut découper le grand carré en quatre parties : un carré $(6k + 1) \times (6k + 1)$, un carré 6×6 et deux rectangles $6 \times (6k + 1)$.

À une symétrie ou une rotation près du carré, on peut toujours effectuer ce découpage de telle sorte que le monomino soit contenu dans le carré $(6k+1)\times(6k+1)$.

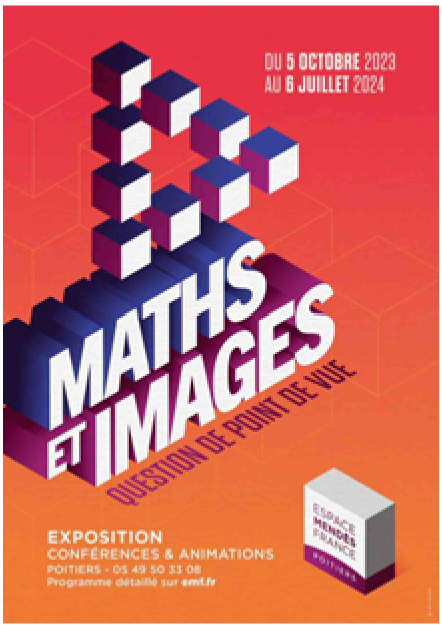
D'après la proposition 1, les rectangles $6\times(6k+1)$ et le carré 6×6 peuvent être pavés par des L-triominos et d'après l'hypothèse de récurrence, on peut paver le reste du carré $(6k+1)\times(6k+1)$ par des L-triominos, ce qui conclut la preuve par récurrence.



Dans le Petit Vert n°124, François Drouin a montré qu'il est possible de paver un carré $7x\times 7$ par des L-triominos et un monomino. J'ai généralisé ce résultat aux carrés $(6k+1)\times(6k+1)$. On peut adapter le raisonnement aux carrés $(6k-1)\times(6k-1)$.

Annonce

MATHS ET IMAGES



Les vacances d'automne sont achevées. D'autres plus hivernales ou printanières nous donneront une raison supplémentaire d'aller à Poitiers voir de bien belles choses.

Le dossier pédagogique et le livret de l'exposition sont alléchants, riches en ressources en ligne !

L'exposition sera présente jusqu'aux vacances d'été, cela nous laisse du temps pour programmer notre visite.