PROBLÈME 155
TOUTES LES FACES

Proposé par Philippe Févotte

Un jeu consiste à lancer un dé tétraédrique, de faces numérotées de 1 à 4, autant de fois que nécessaire jusqu'à obtenir toutes les faces de 1 à 4.

Si on réussit à obtenir toutes les faces en 8 coups ou moins, on gagne 2 euros ; sinon on perd 1 euro.

Quelle est l'espérance de gain à ce jeu ?

SOLUTION PROBLÈME 154
DIFFÉRENCES D'AU PLUS DEUX

Enoncé de Jacques CHONÉ: Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et u_n le nombre de nombres à n chiffres, n'utilisant que les chiffres 1, 2, 3 ou 4 et tels que deux chiffres consécutifs diffèrent d'au plus 2.
On convient que $u_1 = 4$. Déterminer une formule explicite donnant u_n en fonction de n.

Une solution a été proposée par André Stef.

Appelons bon nombre, un nombre n'utilisant que les chiffres 1, 2, 3 ou 4 et tels que deux chiffres consécutifs diffèrent d'au plus 2. Si on note E_n l'ensemble des bons nombres à n chiffres, tout nombre x de E_{n+1} s'écrit comme un nombre y de E_n suivi :

- d'un 1, 2 ou 3 si y se termine par 1
- d'un 1, 2, 3 ou 4 si y se termine par 2
- d'un 1, 2, 3 ou 4 si y se termine par 3
- d'un 2, 3 ou 4 si y se termine par 4

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, on note :
a_n le nombre de bons nombres à n chiffres finissant par 1
b_n le nombre de bons nombres à n chiffres finissant par 2
c_n le nombre de bons nombres à n chiffres finissant par 3
d_n nombre de bons nombres à n chiffres finissant par 4
Par des raisons de symétrie, on a immédiatement $a_n = d_n$ et $b_n = c_n$.
On en déduit que $u_n = 2a_n + 2b_n$.
En considérant les cas énoncés précédemment, on obtient les relations :

Retour au sommaire

$$a_{n+1} = a_n + 2b_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = 2a_n + 2b_n \ (= u_n) \ (*)$$

On peut donc écrire, pour tout entier n non nul, la relation matricielle

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \text{ en notant } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice A a pour équation caractéristique $(1 - r)(2 - r) - 4 = 0$. Elle deux valeurs propres $r_1 = \dfrac{3 - \sqrt{17}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{3 + \sqrt{17}}{2}$; elle est donc diagonalisable et il existe une matrice de passage P telle que $A = P^{-1}DP$ avec $D = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$

On en déduit que : $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$, soit : $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = P^{-1}D^{n-1}P \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ ou encore :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} r_1^{n-1} & 0 \\ 0 & r_2^{n-1} \end{pmatrix}^{n-1} P \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

L'écriture des deux valeurs propres n'incite pas à déterminer les vecteurs propres, on va donc établir la formule par un calcul direct.

En effet, a_n et b_n sont donc des combinaisons linéaires de r_1^{n-1} et r_2^{n-1}, et par conséquent u_n également.

Il existe donc deux réels α et β tels que $u_n = \alpha r_1^{n-1} + \beta r_2^{n-1}$

Avec $E_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, on obtient $a_1 = b_1 = 1$, puis $a_2 = 3$ et $b_2 = 4$, soit $u_1 = 4$ et $u_2 = 14$.

En utilisant ces deux premiers termes, on détermine les réels $\alpha = 2 - \dfrac{8}{\sqrt{17}}$ et $\beta = 2 + \dfrac{8}{\sqrt{17}}$

Ainsi

$$u_n = \left(2 - \frac{8}{\sqrt{17}}\right)\left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}\right)^{n-1} + \left(2 + \frac{8}{\sqrt{17}}\right)\left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right)^{n-1}$$

ou encore en ramenant à une puissance de n :

$$u_n = \frac{-5 + \sqrt{17}}{2\sqrt{17}}\left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}\right)^n + \frac{5 + \sqrt{17}}{2\sqrt{17}}\left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right)^n$$

André Stef fait plusieurs remarques :

Remarque 1 :

Un calcul des puissances en faisant apparaitre séparément les exposants pairs et impairs met en évidence que le résultat est rationnel (à défaut de montrer qu'il est entier).

Remarque 2 :

On pouvait se passer des calculs matriciels en remarquant que, par soustraction des premières relations, on obtient $b_{n+1} = a_{n+1} + a_n$

On en déduit immédiatement que

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2a_n$$

De même

Retour au sommaire

$$b_{n+2} = 2a_{n+1} + 2b_{n+1}$$
$$b_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n + 2a_n + 2b_{n+1},$$

Donc $b_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n + 2a_n + 2b_{n+1}$

Donc $b_{n+2} = 4b_n + (b_{n+1} - 2b_n) + 2b_{n+1}$

Soit $b_{n+2} = 4b_n + (b_{n+1} - 2b_n) + 2b_{n+1}$

D'où $b_{n+2} = 3b_{n+1} + 2b_n$

a_n et b_n suivant la même relation de récurrence, il en est de même pour u_n ; donc la suite u_n vérifie :

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n$$

La suite (u_n) est donc une suite linéaire d'ordre 2 qu'on sait déterminer par des moyens classiques.

En fait, on pouvait obtenir directement cette dernière relation en remarquant que

$$u_{n+2} = 2a_{n+2} + 2b_{n+2}$$

Donc $u_{n+2} = 2(a_{n+1} + 2b_{n+1}) + 2(2a_{n+1} + 2b_{n+1})$

Soit $u_{n+2} = 6a_{n+1} + 8b_{n+1}$

Ou encore $u_{n+2} = 3\left(2a_{n+1} + 2b_{n+1}\right) + 2b_{n+1}$

D'où finalement en utilisant la relation (*) : $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n$

C'est la méthode développée par Jacques Choné, qui par ailleurs fait remarquer que cette suite (u_n) est la suite A055099 de l'OEIS (oeis.org).

" **LE PETIT VERT** " est le bulletin de la régionale **APMEP Lorraine**.

Né en 1985, il complète les publications nationales que sont le bulletin «Au fil des maths» et le BGV. Il parait quatre fois dans l'année (mars, juin, septembre et décembre).

Son but est d'une part d'**informer** les adhérents lorrains sur l'action de la Régionale et sur la "vie mathématique" locale, et d'autre part de **permettre les échanges "mathématiques"** entre les adhérents.

Il est alimenté par les contributions des uns et des autres ; chacun d'entre vous est vivement sollicité pour y écrire un article et cet article sera le bienvenu : les propositions sont à envoyer à redactionpetivert@apmeplorraine.fr.

Le Comité de rédaction est composé de Geneviève Bouvart, Fathi Drissi, François Drouin, Françoise Jean, Christelle Kunc, Laetitia Ludwigs, Léa Magnier, Aude Picaut, Michel Ruiba, Jacques Verdier et Gilles Waehren.

La couverture du Petit Vert n° 155 est réalisée par Léa Magnier.

Retour au sommaire