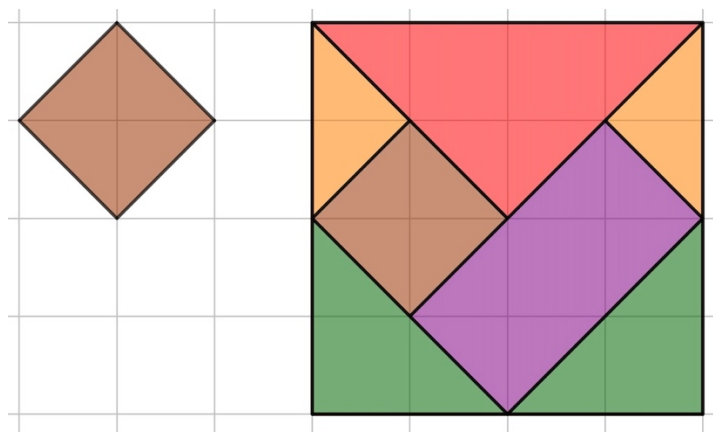


DÉFI 155-1 : UN CARRÉ ACCUEILLANT



Le « Carré de Metz » est accueillant. Un deuxième carré brun a frappé à sa porte. Il a été reçu avec joie.

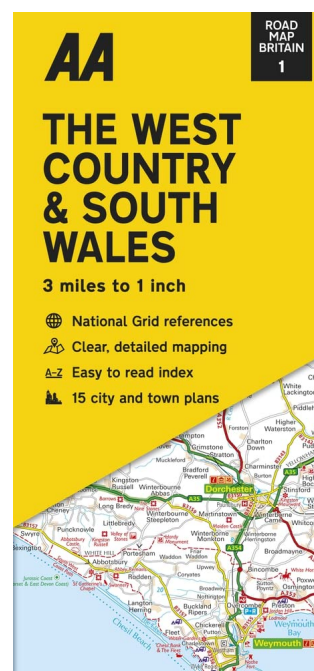
« Viens avec nous, avec nos huit pièces, nous allons pouvoir réaliser un nouveau carré ».

Dans ce nouveau carré, quelles places pourra occuper le deuxième carré brun ?

DÉFI 155-2 FIND THE SCALE

Une de nos adhérentes a suivi, à la fin de ce printemps 2023, les routes du Pays de Galles, en pédalant. Riche en tours et détours, ce périple suppose de se munir d'une carte de la région. Mais voilà, l'acquisition d'un tel document ne va pas sans poser quelques questions sur son échelle. La carte ci-dessous est-elle au 25 millième ? au 50 millième ? **Peut-être est-elle d'un autre calibre, mais lequel ?**

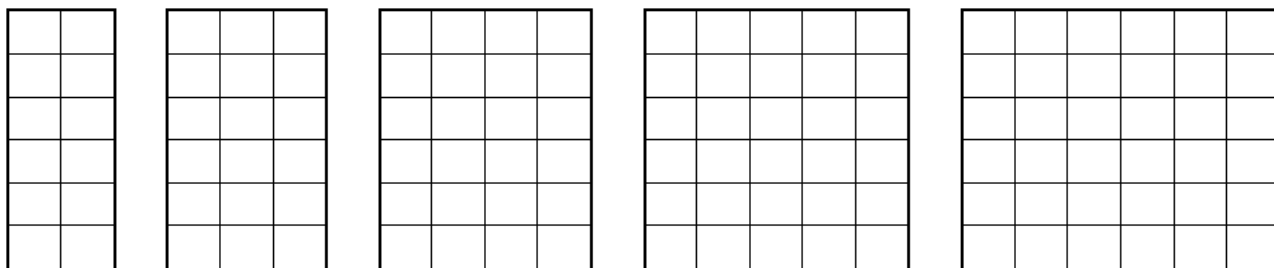
On rappelle qu'un *mile* représente 1,609 km (moyen mnémotechnique : « un ciseau neuf ») et qu'un *inch* représente 2,54 cm (pas de moyen mnémotechnique... si vous en trouvez un, nous sommes preneurs).



[Retour au sommaire](#)

SOLUTION DÉFI 154 – 1

Énoncé



Des élèves ont réussi à recouvrir ces rectangles 2×6 , 3×6 , 4×6 , 5×6 et 6×6 par des Petits L.

Sauriez-vous expliquer pourquoi un rectangle 23×6 est lui aussi recouvrable par des « Petits L » ?

Sauriez-vous expliquer pourquoi un rectangle 2023×6 est lui aussi recouvrable par des « Petits L » ?

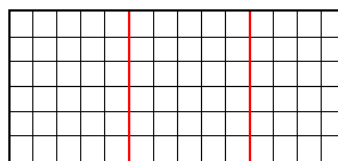
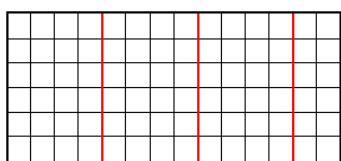
Solution

Pour le rectangle 23×6

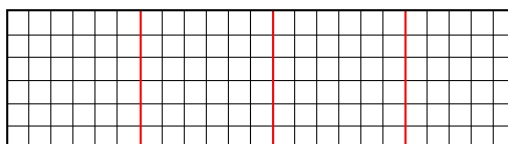
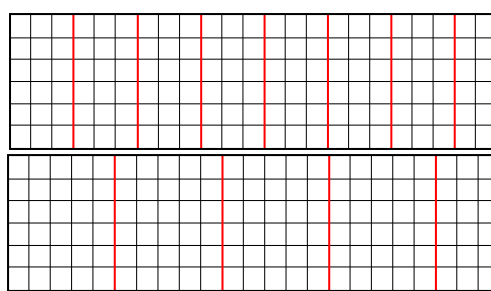
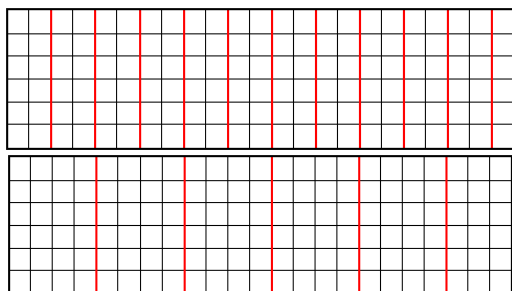
Les pièces utilisées en cycle 2 et proposées avec les documents présents sur notre site sont des assemblages de carrés de 2cm de côté. Les dimensions du rectangle à recouvrir seraient donc $46\text{cm} \times 12\text{cm}$: il ne peut pas être dessiné sur une feuille A3.

Une possibilité est d'aborder le problème par le recouvrement d'un rectangle de longueur moindre, de faire expliciter la méthode utilisée pour l'appliquer sur un dessin qui ne sera plus à l'échelle des pièces.

Un rectangle 14×6 est utilisable. Il peut être dessiné sur une feuille A4, il peut être recouvert par des « Petits L », il peut aussi être recouvert par des rectangles qui avaient été recouverts par les élèves de cycle 2 (défi à proposer : utiliser le moins possible de rectangles différents et faire émerger le fait qu'on va utiliser le plus possible de rectangle d'un modèle choisi).



La méthode va ensuite être proposée pour des dessins de rectangles 23×6 .



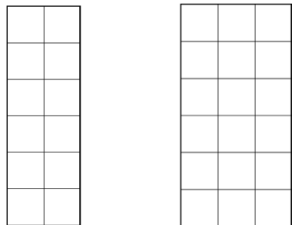
L'utilisation de rectangles 2×6 ne sera pas conservée, : le rectangle 1×6 ne fait pas partie de ceux recouverts par les élèves de cycle 2, il n'est pas recouvrable par deux « Petits L ».

La recherche de « Combien de fois 5 dans 23 ? » ou de « Combien de fois 6 dans 23 ? » va commencer à induire l'usage de divisions euclidiennes.

Une possible solution pour le rectangle 2023×6

$$2023 = 2020 + 3$$

$$2023 = 2 \times 1010 + 3$$



Le rectangle 6×2023 peut donc être découpé en 1010 rectangles 2×6 et 1 rectangle 3×6 . Tous ces rectangles ont recouvrables par des « Petits L ».

Le rectangle 2023×6 est donc recouvrable par des « Petits L ».

D'autres possibles solutions pour le rectangle 2023×6

L'envie vient d'utiliser également les rectangles 3×6 , 4×6 , 5×6 ou le rectangle carré 6×6 .

$$2023 = 3 \times 674 + 1$$

$$2023 = 4 \times 505 + 3$$

$$2023 = 5 \times 404 + 3$$

$$2023 = 6 \times 337 + 1$$

Il y a là l'occasion de faire vivre « en situation » des divisions euclidiennes. L'examen des restes de ces divisions nous persuade que l'utilisation des rectangles 3×1 ou des rectangles 6×1 n'amène pas à un recouvrement du rectangle 2023×6 : le rectangle 1×6 n'est pas recouvrable par deux « Petits L ».

Au cycle 4

Tout rectangle ayant une des dimensions est égale à 6 (et l'autre différente de 1) est-il recouvrable par des « Petits L » ?

Il est facile de se convaincre que le rectangle 1×6 ne peut pas être recouvert par des « Petits L ».

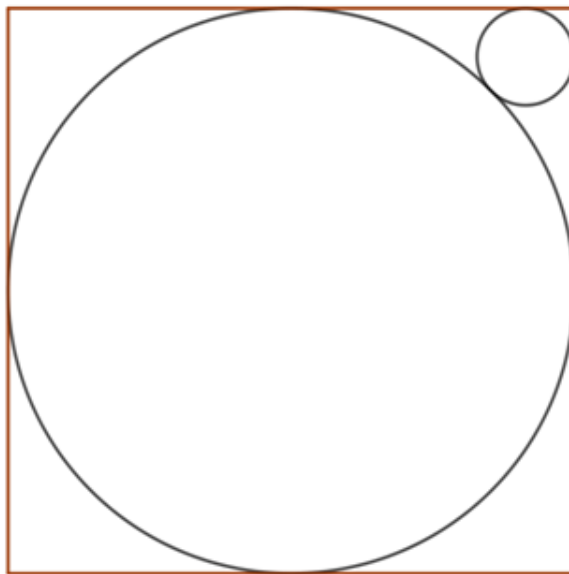
Nous considérons donc les rectangles $n \times 6$ (avec $n \neq 1$).

Si n est pair, nous pouvons écrire $n = 2p$. Le rectangle $6 \times n$ est donc obtenu par juxtaposition de p rectangles 2×6 recouvrables par des « Petits L ». Il est donc lui aussi recouvrable par des « Petits L ».

Si n est impair, nous pouvons écrire $n = 2p + 1$ ou $n = 2(p - 1) + 3$. Le rectangle $6 \times n$ est donc obtenu par juxtaposition de $p - 1$ rectangles 2×6 et d'un rectangle 3×6 tous recouvrables par des « Petits L ». Il est donc lui aussi recouvrable par des « Petits L ».

Manipulation, schématisation, raisonnement arithmétique et raisonnement algébrique se sont donné la main pour faciliter la résolution de ces défis.

SOLUTION DÉFI 154 – 2 DEUX CERCLES DANS UN CARRÉ



Le grand cercle est inscrit dans le carré et tangent au petit cercle. Le petit cercle est tangent à deux côtés du carré.

Déterminer la longueur du côté du carré sachant que le petit cercle a pour rayon 1.

Solution

1^{ère} démarche :

D'après les propriétés de la figure, les triangles $AO'Q$ et AOP sont rectangles et isocèles respectivement en Q et en P .

Et on a :

$$AQ = QO' = R$$

$$AP = PO = 1$$

En appliquant le théorème de Pythagore à ces deux triangles, on obtient :

$$AO = \sqrt{2} \text{ et } AO' = R\sqrt{2}$$

$$\text{De plus, } AO' = AO + OM + MO'$$

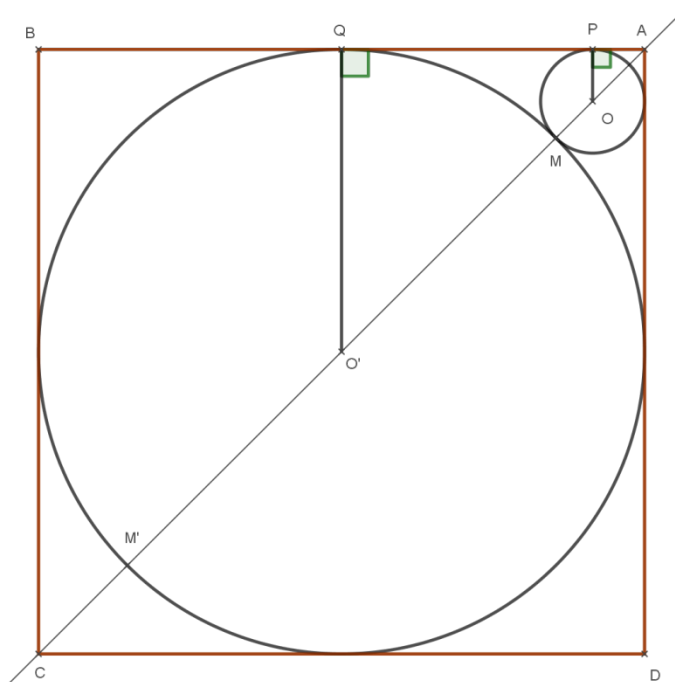
On en déduit que :

$$R\sqrt{2} = R + 1 + \sqrt{2} \text{ D'où :}$$

$$R = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = (\sqrt{2} + 1)^2 \text{ Le grand cercle étant}$$

inscrit dans le carré $ABCD$, son côté vaut le double du rayon de ce cercle et donc :

$$AB = 2(\sqrt{2} + 1)^2$$



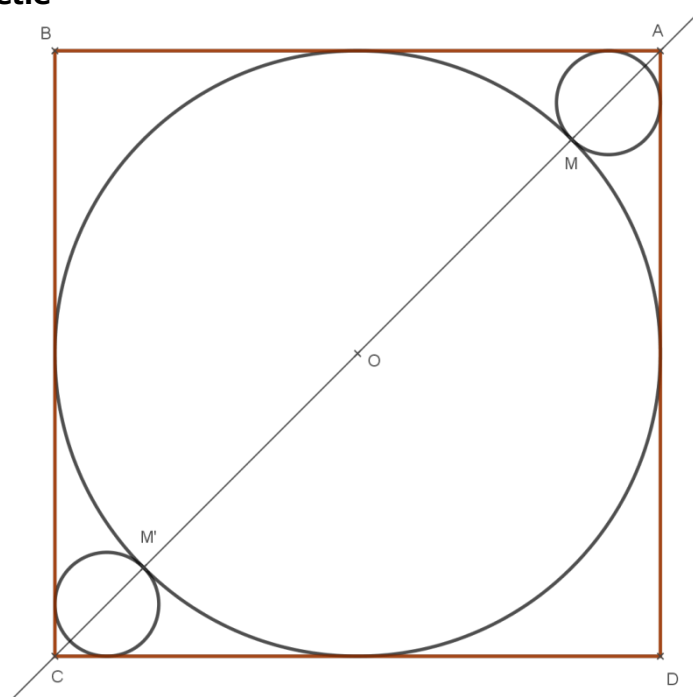
2^{ème} démarche : en utilisant une homothétie

On cherche la longueur AB sachant que le grand cercle est inscrit dans le carré ABCD.

Des propriétés de la figure, on peut déduire que la longueur recherchée est égale au diamètre du grand cercle.

Et que le grand cercle est l'image du petit cercle par l'homothétie de centre A et de rapport $k = \frac{AM'}{AM}$.

Ainsi, le diamètre du grand cercle vaut k fois le diamètre du petit cercle soit $2k$.



On a : $AC = AM + AM'$ et $AM' = kAM$

Donc $AC = AM(k + 1)$

D'autre part, $AC = AB\sqrt{2}$ et $AB = MM' = AM' - AM = AM(k - 1)$

D'où $AC = AM(k - 1)\sqrt{2}$

Il en résulte que :

$$AM(k + 1) = AM(k - 1)\sqrt{2}$$

Ou encore :

$$k + 1 = (k - 1)\sqrt{2}$$

Le rapport k est donc solution de l'équation $x + 1 = \sqrt{2}(x - 1)$

$$\sqrt{2} + 1 = x(\sqrt{2} - 1)$$

$$x = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}$$

$$x = (\sqrt{2} + 1)^2$$

$$x = 3 + 2\sqrt{2}$$

L'unique solution de cette équation est le nombre $3 + 2\sqrt{2}$.

Donc, le rapport k de cette homothétie est $3 + 2\sqrt{2}$.

Et par suite, la longueur du côté du carré ABCD vaut $6 + 4\sqrt{2}$