ÉTUDE MATHÉMATIQUE

PAVAGE D'UN ESCALIER PAR DES L-TRIOMINOS

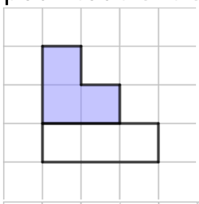
Fathi Drissi

Le plus petit escalier que l'on puisse paver avec des L-triominos est un L-triomino : c'est un escalier de taille $n = 2$.

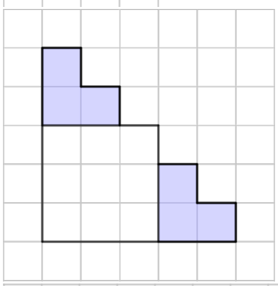
Escalier de taille n=2

Quels sont les escaliers qui peuvent être pavés par des L-triominos ?

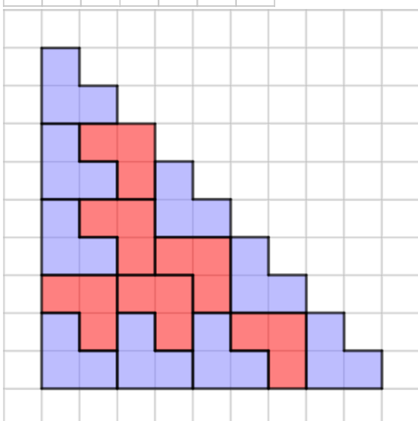
Un escalier est formé de $\frac{n(n+1)}{2}$ carrés. Donc, pour qu'il puisse être pavé par des L-triominos, il faut que $\frac{n(n+1)}{2}$ soit divisible par 3 ou encore $n(n+1)$ soit un multiple de 6, ce qui est le cas pour tout entier n congru à 0, 2, 3 ou 5 modulo 6.



Un escalier de taille 3 ne peut pas être pavé par des L-triominos.

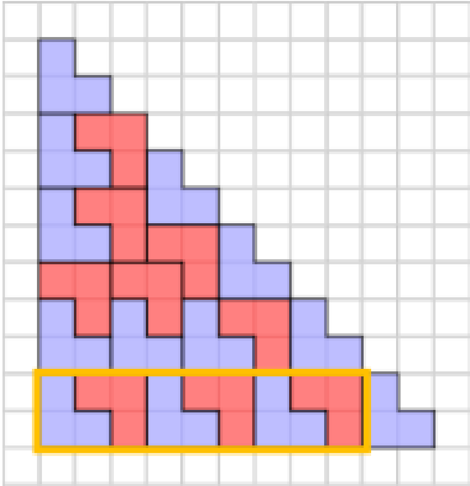


Pour un escalier de taille 5, les deux premières et les deux dernières "marches" de l'escalier doivent être recouvertes par un L-triominos comme l'indique le dessin ci-contre. Ce qui laisse un carré 3×3 que l'on sait impossible à paver par des L-triominos.



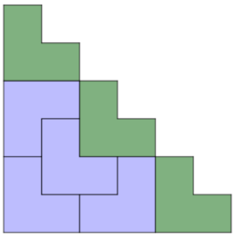
Un escalier de taille $9 = 6 \times 1 + 3$ peut être pavé par des L-triominos.

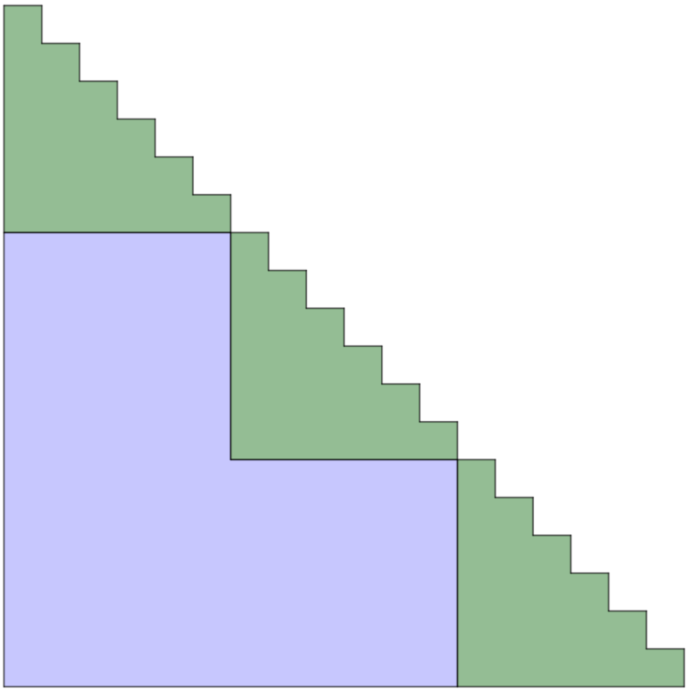
Retour au sommaire



Un escalier de taille $11 = 6 \times 1 + 5$ peut être pavé par des L-triominos. En effet, cet escalier est composé d'un escalier de taille 9, d'un rectangle 9×2 et d'un L-triomino

On peut aussi remarquer qu'un escalier de taille $n = 6$ peut être décomposé en trois L-triominos (escalier de taille 2) et un L-triomino à l'échelle 2. Il peut donc être pavé par des L-triominos.





En poursuivant le procédé ci-dessus, un escalier de taille $n = 18$ peut être décomposé en trois escaliers de taille 6 et un L-triomino à l'échelle 6. Il peut donc être pavé par des L-triominos.

En raisonnant par récurrence, ce résultat peut être généralisé aux escaliers de taille $n = 2 \times 3^p$ où p est un entier naturel. Il suffit de remarquer que $2 \times 3^{p+1} = 3 \times (2 \times 3^p)$ et donc, un escalier de taille $2 \times 3^{p+1}$ est composé de trois escaliers de taille 2×3^p et un L-triomino à l'échelle 2×3^p.

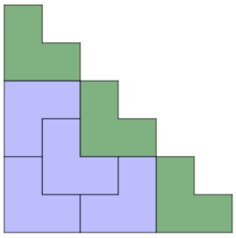
Proposition 1

Pour tout entier naturel n non nul, un escalier de taille $6n$ peut être pavé par des L-triominos.

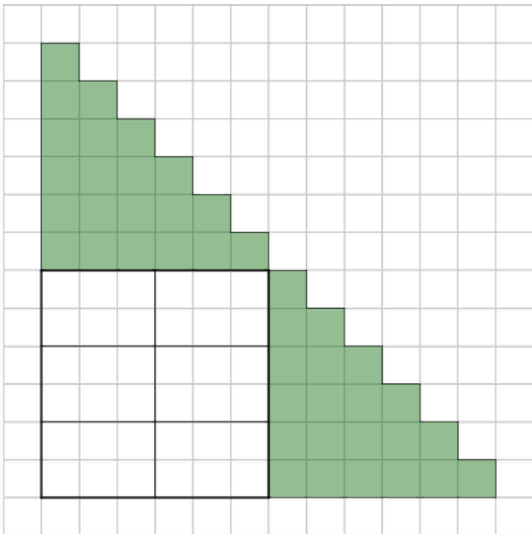
On va démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, un escalier de taille $6n$ peut être pavé par des L-triominos.

Pour tout entier naturel n non nul, on note $P(n)$ la propriété «Un escalier de taille $6n$ peut être pavé par des L-triominos.»

Pour $n = 1$, un escalier de taille 6 peut être pavé par des L-triominos.
La propriété est ainsi vraie pour $n = 1$.



Soit n un entier strictement positif.
On va montrer que si la propriété $P(n)$ est vraie, alors la propriété $P(n + 1)$ est vraie.



Un escalier de taille $6(n + 1)$ est composé d'un escalier de taille $6n$, d'un escalier de taille 6 et d'un rectangle $6 \times 6n$.

En effet :

$$\frac{6(n+1)\times(6(n+1)+1)}{2}=\frac{(6n+6)\times(6n+1+6)}{2}$$

$$=\frac{6n\times(6n+1)}{2}+\frac{6n\times 6}{2}+\frac{6\times(6n+1)}{2}+\frac{6\times 6}{2}$$

$$=\frac{6n\times(6n+1)}{2}+\frac{6n\times 6}{2}+\frac{6\times 6n}{2}+\frac{6}{2}+\frac{6\times 6}{2}$$

$$=\frac{6n\times(6n+1)}{2}+6\times 6n+\frac{6\times 7}{2}$$

Or, un rectangle $6 \times 6n$ et un escalier de taille 6 peuvent être pavés par des L-triominos et d'après l'hypothèse de récurrence, un escalier de taille $6n$ peut l'être aussi.

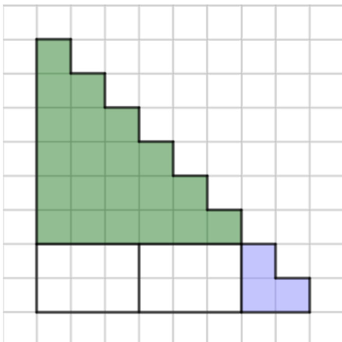
La propriété $P(n + 1)$ est donc vraie et on a hérédité.

On peut donc conclure que pour tout entier naturel n non nul, un escalier de taille $6n$ peut être pavé par des L-triominos.

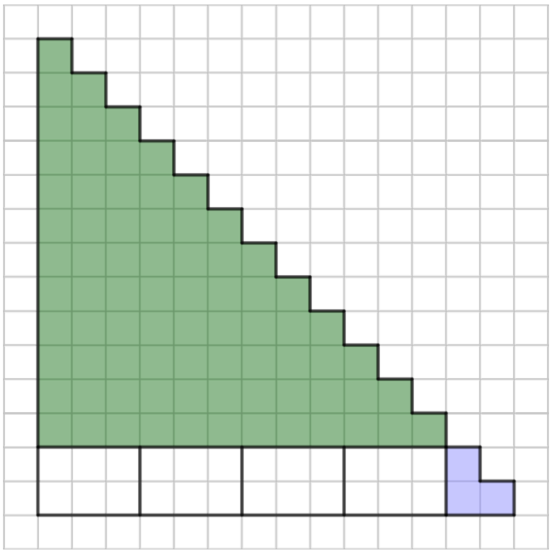
Proposition 2

Pour tout entier naturel n non nul, un escalier de taille $6n+2$ peut être pavé par des L-triominos.

Pour $n = 1$, un escalier de taille 8 peut être pavé par des L-triominos.



Retour au sommaire



Preuve

Soit n un entier strictement positif.

Un escalier de taille $6n+2$ est composé d'un escalier de taille $6n$, d'un L-triomino et d'un rectangle $6n \times 2$.

Or, un rectangle $6n \times 2$ peut être pavé par des L-triominos et d'après la proposition 1, un escalier de taille $6n$ peut l'être aussi.

Donc, un escalier de taille $6n+2$ peut être pavé par des L-triominos.

Proposition 3

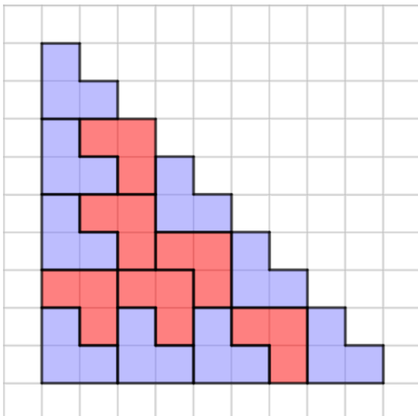
Pour tout entier naturel n non nul, un escalier de taille $6n+3$ peut être pavé par des L-triominos.

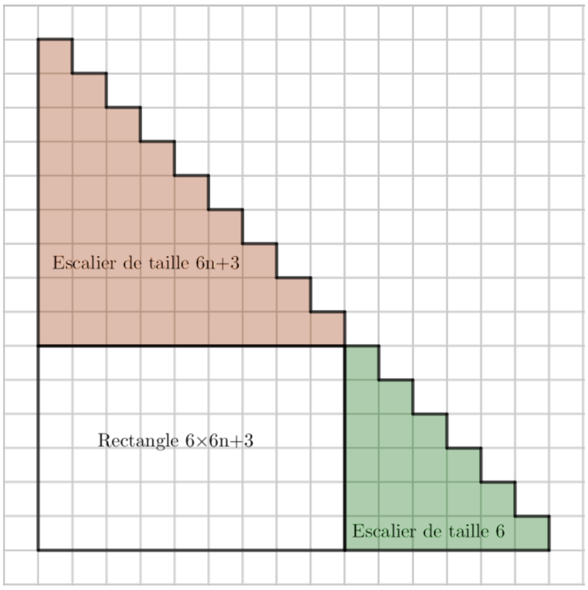
On va démontrer par récurence que pour tout entier naturel n non nul, un escalier de taille $6n+3$ peut être pavé par des L-triominos.

Pour tout entier naturel n non nul, on note $P(n)$ la propriété «Un escalier de taille $6n+3$ peut être pavé par des L-triominos.»

Pour $n = 1$, un escalier de taille 9 peut être pavé par des L-triominos.

La propriété est ainsi vraie pour $n = 1$





Soit n un entier strictement positif.

On va montrer que si la propriété $P(n)$ est vraie, alors la propriété $P(n+1)$ est vraie.

Un escalier de taille $6(n+1)+3$ est composé d'un escalier de taille $6n+3$, d'un escalier de taille 6 et d'un rectangle $6 \times (6n+3)$.

Or, un rectangle $6 \times (6n+3)$ et un escalier de taille 6 peuvent être pavés par des L-triominos et d'après l'hypothèse de récurrence, un escalier de taille $6n+3$ peut l'être aussi.

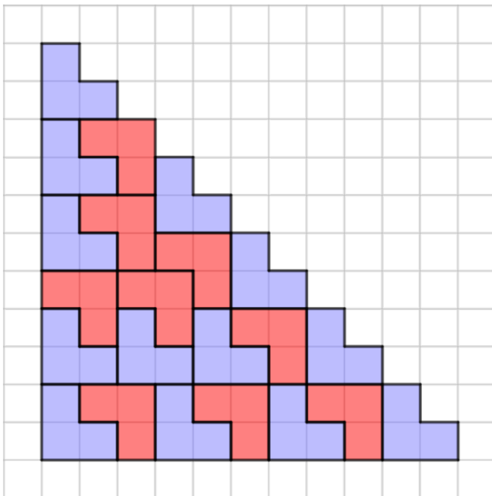
La propriété $P(n+1)$ est donc vraie et on a hérédité.

On peut donc conclure que pour tout entier naturel n non nul, un escalier de taille $6n+3$ peut être pavé par des L-triominos.

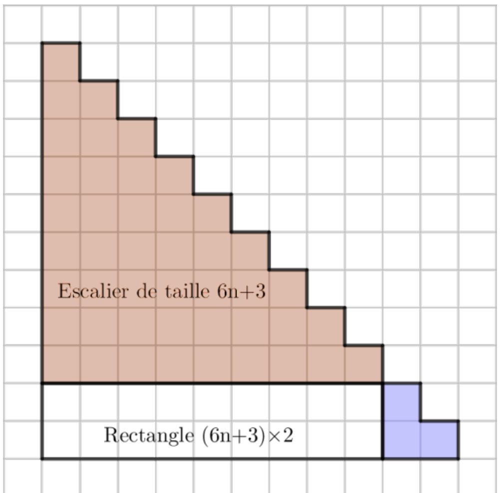
Retour au sommaire

Proposition 4

Pour tout entier naturel n non nul, un escalier de taille $6n+5$ peut être pavé par des L-triominos.



Pour $n = 1$, un escalier de taille 11 peut être pavé par des L-triominos.



Preuve

Soit n un entier strictement positif.

Un escalier de taille $6n + 5$ est composé d'un escalier de taille $6n + 3$, d'un L-triomino et d'un rectangle $(6n + 3) \times 2$.

Or, un rectangle $(6n + 3) \times 2$ est formé de rectangles 3×2 et donc pavable par des L-triominos, et d'après la proposition 3, un escalier de taille $6n + 3$ peut l'être aussi.

Donc, un escalier de taille $6n+5$ peut être pavé par des L-triominos.

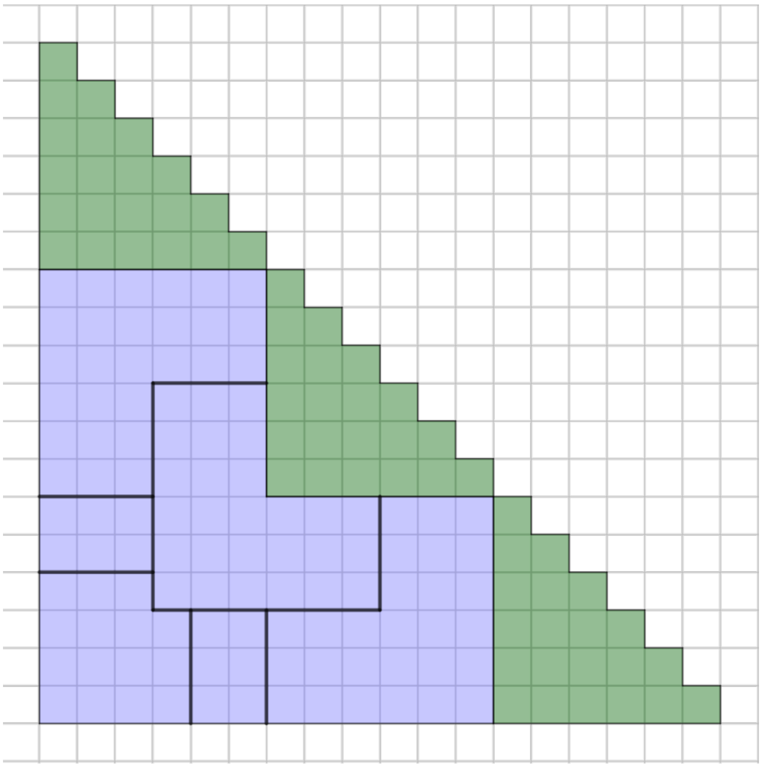
On peut regrouper les quatre propositions précédentes en une seule propriété :

Propriété

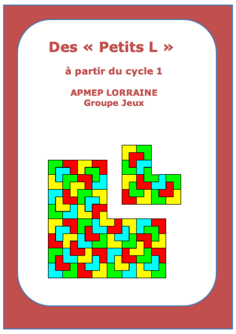
Pour tout entier n strictement positif, un escalier de taille n peut être pavé par des L-triominos si, et seulement si, n est congru à 0, 2, 3 ou 5 modulo 6.

Solution pour un escalier de taille $18 = 2 \times 3^2$

Retour au sommaire



Complément



Le recouvrement des escaliers doubles a été évoqué dans les pages 18, 19 et 20 d'un document bientôt de nouveau accessible sur notre site.

Retour au sommaire