N° 155 Septembre 2023

LE PETIT VERT

Bulletin de la Régionale Lorraine APMEP

Triangulons le planisphère

Le cube diabolique

Oral en Seconde

De la beauté des nombres

LE MÉPRIS

UN FILM DE

~~JEAN-LUC GODARD~~

Régionale de Lorraine APMEP

www.apmeplorraine.fr

SOMMAIRE

Édito

Prophétie autoréalisatrice (*Gilles WAEHREN)*

Vie de la régionale

Nuit du Jeu Mathématique à Frouard

Site indisponible

Retour sur le Rallye de L'APMEP Lorraine

Il y a 25 ans, le certificat de formation générale

Carrés Géomagiques : des activités pour la classe

Dans nos classes

Planisphère par triangulation (*Céline Fauvinet et Renaud Couder)*

Quart d'heure de lecture (*Laetitia Ludwigs)*

Oral en Seconde (*Gilles Waehren)*

Vie des labomaths

Le premier projet du Labomaths de Sarrebourg

Étude mathématique

Pavage d'un escalier par des L-triominos (*Fathi Drissi)*

Vu sur la toile

En nombre (*Gilles WAEHREN)*

Maths et ...

Arts

À l'Alhambra (Épisode 2) (*Groupe Maths et Arts - APMEP Lorraine)*

Roger Hardy et la Fabuloserie (*Groupe Maths et Arts - APMEP Lorraine)*

Découpages

Découper un carré en deux carrés non superposables (*Groupe Jeux - APMEP Lorraine)*

Jeux

Avec les pièces du cube « Diabolique » (*Groupe Jeux - APMEP Lorraine)*

Vie courante

Comment renforcer les stéréotypes

Philo

Bacon Combattre les idoles (*Didier Lambois)*

Médias

L'APMEP est-elle en danger ?

Un prix coûtant mathématique

Des défis pour nos élèves

DÉFI 155-1

DÉFI 155–2

Solution DÉFI 154 – 1

Solution DÉFI 154 – 2

Des problèmes pour les professeurs

Problème 155

Solution Problème 154

ÉDITO

PROPHÉTIE AUTORÉALISATRICE

Gilles WAEHREN

C'est fait. Le pinacle de la réforme 2019 est tombé : toutes les épreuves du baccalauréat 2024 auront lieu en juin. Après avoir attendu deux ans de voir l'effet des épreuves placées en mars, le ministère a eu tôt fait de percevoir les complications qui accompagnaient cette mesure. Ce n'est pas faute d'avoir annoncé maintes fois les conséquences prévisibles d'un tel calendrier. Ce n'est pas faute d'avoir observé, en 2022, le chaos lié aux épreuves en mai. Il a fallu que la reconquête du mois de juin 2023 soit le fiasco déjà anticipé par les enseignants, pour que des décisions soient prises. Notre métier nous rappelle tous les jours que rien ne remplace l'expérience vécue. Mais cela permet-il de jouer aux apprentis sorciers ? Peut-on jouer avec le fonctionnement d'une institution sous prétexte de la réformer ? Pourquoi ne pas avoir tenu compte plus tôt des nombreux avertissements des spécialistes de l'éducation ?

Ce n'est certes pas la première disparition de cette réforme. Certains se souviennent-ils encore des E3C ou de la suppression des maths en première ? Là encore, les appréhensions étaient fortes et les résultats de ces choix ont-ils été conformes aux attentes. La prochaine décision portera-t-elle sur le maintien des trois spécialités en Terminale ? Sur trois heures de mathématiques obligatoires pour tout le monde en cycle terminal ? Les coefficients des spécialités seraient déjà en débat.

Placer les épreuves de spécialités en mars reposait sur l'idée d'appuyer la sélection dans Parcoursup sur des critères qui ne dépendaient pas uniquement du lycée d'origine. Autrement dit, il fallait que les établissements de l'enseignement supérieur examinent des dossiers d'élèves dont les notes n'étaient pas uniquement celles du contrôle continu, pour donner un semblant d'objectivité. De l'aveu de certaines commissions, les notes de spécialités n'ont d'ailleurs que très peu compté, en mai, dans le tri des candidats à telle ou telle formation. Mais il faut aussi surtout dire que, dans les années précédant la réforme, notre diplôme national a vu son rayonnement diminuer devant l'importance grandissante de l'orientation post-bac. Le premier examen de l'enseignement supérieur perdait de son importance, notamment pour des élèves qui s'orientaient dans des filières très éloignées de leur projet initial. Prendre davantage en compte les résultats des épreuves de spécialités devait permettre de renforcer l'importance du baccalauréat. Las, ce « rite de passage » vers le monde des études risque de connaître le destin du DNB : une expérience initiatique sans véritable retentissement.

D'aucuns avaient déjà remis en cause le baccalauréat lui-même en tant que diplôme national, compte-tenu des 40 % de contrôle continu. On peut penser que cette formule a manqué de lisibilité pour le citoyen qui cherche à suivre l'actualité. Par rapport à ses prédécesseurs, ce nouveau Bac a eu son lot de gagnants (les élèves qu'on ne voyait pas réussir), de perdants (ceux qui auraient mérité de l'avoir malgré tout) et de contestataires (ceux qui l'ont raté à 0,01 point). Tout cela ne doit pas nous empêcher de nous poser à nouveau la question de son utilité. Comme

Retour au sommaire

beaucoup de professeurs l'appréhendaient, certains élèves de Seconde, acceptés en Première Générale sur la base de bulletins lacunaires, ont été conduits à composer des triplettes peu appropriées à la poursuite d'études. Ils n'y ont donc trouvé que peu de place, alors même que quelques uns ont décroché une mention. Peut-être qu'il faudrait réfléchir aux possibilités offertes par les autres Bacs que le général, qui sert souvent de référence pour nos élus et nos médias.

Depuis deux réformes, le Bac technologique connaît un resserrement en termes de contenu et d'opportunités. Le tronc commun de mathématiques et la spécialité maths/physique en STI2D ont conduit à un enseignement incohérent pour cette filière. Il est à noter, toutefois, que ce n'est pas l'épreuve de mathématiques qui a compromis les chances des candidats de STMG cette année. En voulant rapprocher les contenus des enseignements de la filière technologique de ceux de la filière générale, on a oublié qu'une formation plus ouverte sur le monde peut être exigeante aussi.

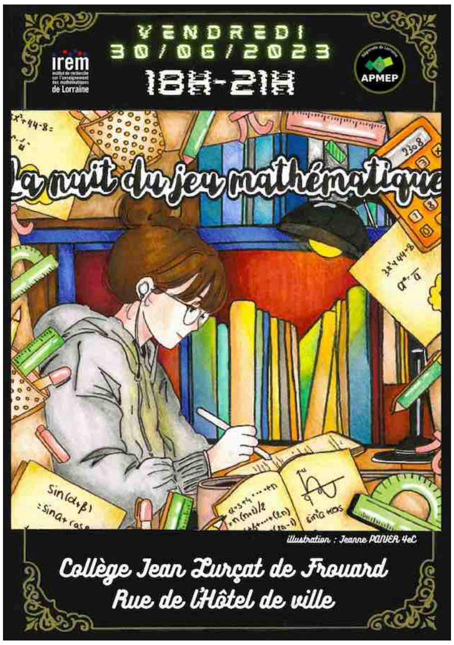
Il en est de même pour le Bac professionnel, grand oublié des médias dans cette réforme. Les mutations qu'il connaît se font à bas bruit ; mais on devrait aussi se pencher sur ses finalités. Seul Bac permettant à son lauréat d'exercer un métier, on a voulu en faire une porte d'accès aux études supérieures. Bien entendu, on peut relever, tous les ans, des cas d'étudiants issus de Bac professionnel réussissant des parcours intéressants. Mais, le bilan de la massification des Bacs pros dans les BTS semble mitigé. La vingtaine de semaines de stage ne suffirait plus à préparer ces élèves au monde du travail. Le BTS, dans lequel beaucoup échouent, est-il une solution ? Il est de plus en plus difficile de trouver des professionnels issus des Bacs pros ou des CAP, quel que soit le secteur. On peut se demander si nous n'allons pas payer la volonté de poursuite d'études à tout prix et la déconsidération de la formation professionnelle. Mais cela aussi, les professeurs l'appréhendaient.

Quoiqu'il en soit, la contre-offensive laborieuse sur le mois de juin, qui concerne surtout les classes de Seconde, sera-t-elle compensée par une percée en août ? Dix jours de plus avant la rentrée pourront-ils changer le monde ? Pour les bacheliers auxquels il manque des bouts de programme (notamment en spécialité mathématique), cela ne s'adresse plus à eux. Pour les autres, enseignants ou élèves, les semaines de remise à niveau n'ont pas toujours suffit à combler les carences d'un système qui ne sait plus comment se réinventer, alors que le nombre d'élèves va croissant et que celui de leurs enseignants ne cesse de fléchir.

Retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

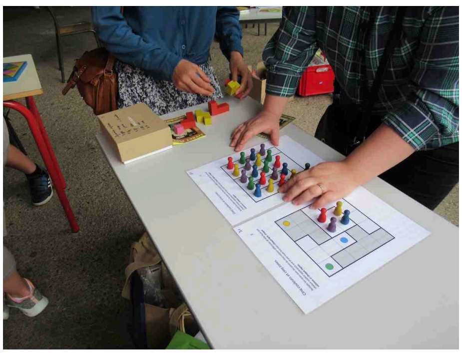
NUIT DU JEU MATHÉMATIQUE À FROUARD



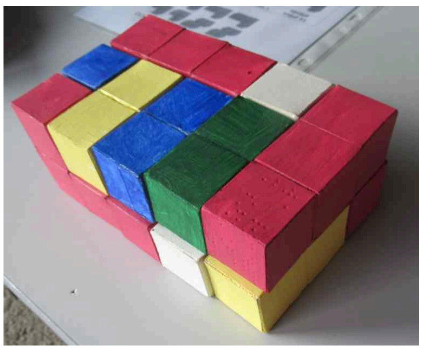
Une centaine de participants sont venus faire des mathématiques en jouant avec ce qui était proposé sur les stands par les groupes jeux de l'IREM de Lorraine et de la régionale Lorraine de l'APMEP.

Entraide pour sortir du labyrinthe

Un jeu coopératif d'intérieur



Une recherche presque aboutie



Une recherche aboutie

Retour au sommaire

Solides et nombres

TRIO : des nombres et des pions

Installation

On joue à tout âge

Des petites briques bien utiles

Un petit tour de magie ?

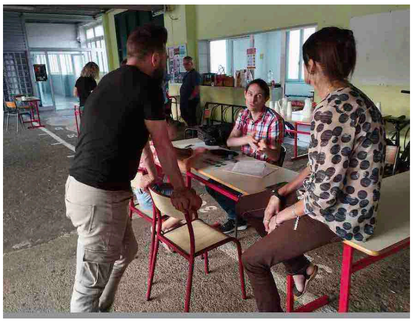
Des mathématiques du 21$^{\text{ème}}$ siècle

De la bonne lecture

Retour au sommaire

Un stand très accueillant

Miam miam…



On échange pendant que d’autres jouent.

Vivement l’an prochain !

Complément

Voici un extrait de chacun des trois livrets offerts aux visiteurs.

Shikaku

Règles

- Le but du jeu est de diviser une grille en plusieurs rectangles, certains d'entre eux peuvent être des carrés.
- Deux rectangles ne peuvent pas se chevaucher.
- La grille doit être entièrement recouverte par les rectangles.
- Des nombres apparaissent sur la grille : chaque rectangle doit en contenir un et un seul.
- Celui-ci indique l'aire du rectangle qui le contient.

Utilisation en mathématiques

Ce jeu peut servir à découvrir ou à illustrer les points notions suivantes :

- les diviseurs d'un nombre ;
- les nombres premiers ;
- les carrés parfaits ;
- les racines carrées ;
- l'aire d'un rectangle ;
- l'aire d'un carré.

1

Par exemple la solution de ce SHIKAKU :

			4
		6	3
2		1	

est la suivante :

			4
		6	3
2		1	

Prêt pour tester ce jeu ?

2

8				
				12
2		3		

3		2		1
	2	8		
	3			
2				4

3

Retour au sommaire

RONDE INFERNALE

Règles

Déterminer les nombres manquants pour que la ronde de calculs soit vraie.

Utilisation en mathématiques

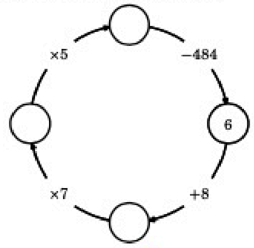
Ce jeu peut permet de développer les compétences suivantes :

Chercher Domaines du socle : 2, 4	Tester, essayer, valider, corriger une démarche. (C2) Extraire des informations, les organiser, les confronter à ses connaissances. (C3)
Calculer Domaines du socle : 4	Calculer avec des nombres. (C2) Contrôler les calculs. (C2) Calculer avec des lettres, des algorithmes… (C4)

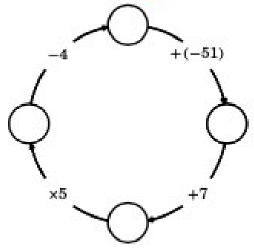
Prêt pour la danse ?

1

Avec le nombre de départ ...



Et puis sans 😱



2

CASSE-TÊTES GÉOMÉTRIQUES

Règles

Déterminer l'aire ou la longueur manquante à l'aide des éléments à disposition dans le configurations proposées.

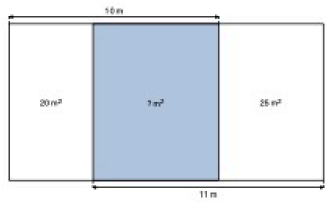
Utilisation en mathématiques

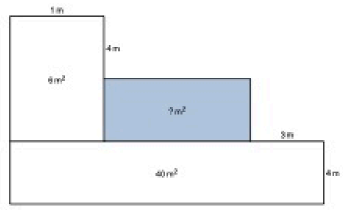
Ce jeu peut permet de développer les compétences suivantes :

Chercher Domaines du socle : 2, 4	Tester, essayer, valider, corriger une démarche. (C2) Extraire des informations, les organiser, les confronter à ses connaissances. (C3)
Raisonner Domaines du socle : 2, 3, 4	Raisonner collectivement. (C2) Justifier, argumenter. (C2)
Calculer Domaines du socle : 4	Calculer avec des nombres. (C2) Contrôler les calculs. (C2) Calculer avec des lettres, des algorithmes… (C4)
Communiquer Domaines du socle : 1, 3	Communiquer pour expliquer, argumenter et comprendre autrui. (C3) Communiquer pour porter un regard critique. (C4)

Prêt pour le casse-tête ?

1





2

Retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

SITE INDISPONIBLE

Le site Internet de la Régionale de Lorraine a été victime d'un piratage durant le mois de juin 2023. Un script malveillant a été introduit dans l'un de nos fichiers. Il est donc interdit d'accès depuis cette date, par notre hébergeur. Pour le moment, les liens du Petit Vert vers les ressources disponibles sur le site ne sont pas accessibles.

L'équipe "site" de la Régionale de Lorraine s'est mobilisée pour remédier à ce problème. Le travail est d'ampleur puisqu'il faut retrouver le (ou les) fichier(s) infecté(s) dans une base de données conséquente. Les quelques membres compétents ne sont pas assez nombreux pour cela ; c'est l'occasion pour nous de rappeler que nous sommes toujours à la recherche de personnes prêtes à soutenir ce travail.

Retour au sommaire

RETOUR SUR LE RALLYE DE L'APMEP LORRAINE

Voici quelques photos des remises des prix organisées pour les classes lauréates.

En collège

Classée numéro 1 : la Troisième D du collège Val de Sarre à Grosbliderstroff (57)

Classée numéro 2 : la Troisième RM du collège de Blainville-sur-L'eau (54).
Deux classes avaient été regroupées pour raison de voyage scolaire

Classée numéro 3 : la Troisième 3 du collège Louis Armand à Moulins lès Metz (57)

Retour au sommaire

En lycée

Classée numéro 1 : la Seconde 3 de l'ensemble Scolaire Notre-Dame Saint-Joseph à Épinal (88)

Classée numéro 2 : la Seconde 7 du lycée Loritz à Nancy (54)

Classée numéro 3 : la Seconde 14 du lycée Loritz à Nancy (54)

Félicitations aux lauréats et lauréates.
À l'an prochain, si vous le voulez bien !

Retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

IL Y A 25 ANS, LE CERTIFICAT DE FORMATION GÉNÉRALE

Dans le Petit Vert 55, figure le sujet de l'épreuve du certificat de formation générale qui s'est déroulée en Meuse le 20 mai 1998. Comment a évolué cette épreuve ?

Le site du ministère de l'éducation nationale nous informe que le certificat de formation générale garantit l'acquisition de connaissances de base dans trois domaines généraux de formation : français, mathématiques, vie sociale et professionnelle. Quelles sont les connaissances de base en mathématiques en 2023 ? Sont-elles différentes de celles de 1998 ?

Sur le site de l'académie de Strasbourg nous avons trouvé un sujet « zéro ».

Ordonner des nombres est une compétence évaluée en 1998 et en 2023.

En 1998 on demande explicitement d'ordonner des nombres écrits en ligne en utilisant le « *signe* < ».

En 2023 le candidat doit dans un premier temps extraire la bonne information d'étiquettes contenant des données inutiles (pour le candidat). « *Classer les différents prix du plus petit au plus grand* » en repérant les nombres dans des étiquettes.

Pour préparer son déménagement, Mme Movens réfléchit à différentes solutions. Des recherches effectuées sur le site « demenagerfacile.com » lui ont permis de collecter les informations ci-dessous en fonction des éléments qu'elle a communiqués.

Voici deux des étiquettes du sujet :

Est-il évident de trouver le « prix » à comparer ? Les candidats ont-ils été déjà confrontés à un déménagement ?

Est-ce que la notion d'assurance leur est familière ?

De manière générale, les compétences évaluées en 1998 le sont également en 2023 mais la tâche à effectuer est plus complexe en 2023. Comme *le certificat de formation générale* valide l'aptitude du candidat à l'utilisation des outils de l'information et de la communication sociale ainsi que sa capacité à évoluer dans un environnement social et professionnel, les exercices en 2023 sont présentés avec un contexte de la vie courante, ce qui ne rend pas plus aisé les exercices à résoudre.

Retour au sommaire

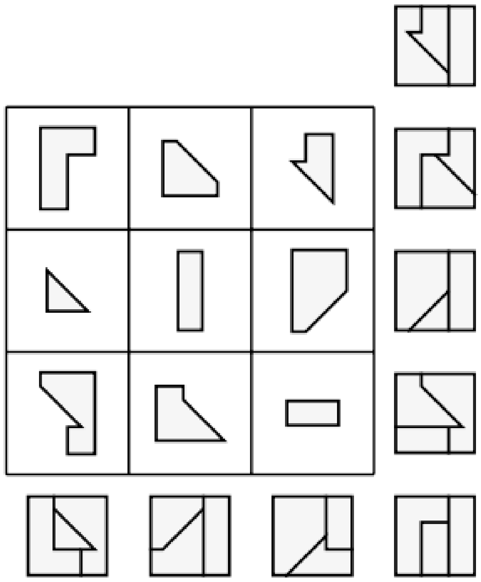
ANNONCE

VIECINQA
VIECINQB

IREM Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

Arnaud Gazagnes

Groupe «Jeux»



En mars 2018, le Petit Vert n°133 nous avait fourni une première présentation de ces ensembles de pièces créés à partir de 2001 par Lee Sallows (des mathématiques du 21ème siècle…).

En 2023, Arnaud Gazagnes nous propose un très important dossier contenant des activités pour des élèves de cycle 4, mais pas que. On y rencontre des activités sur « aire et périmètre », « proportionnalité et fractions », « agrandissements et transformations du plan », « numération, calcul littéral ou algébrique », « tableur et programmation », « constructions et programmes de construction. On y trouve aussi des activités de recherche et des défis pouvant être utilisés hors la classe.

Le document est téléchargeable sur le site de l'IREM de LYON.

Bonne lecture et bonnes utilisations en classe.

Retour au sommaire

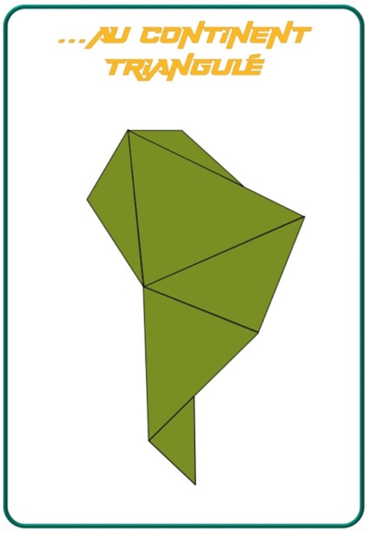
PLANISPHÈRE PAR TRIANGULATION

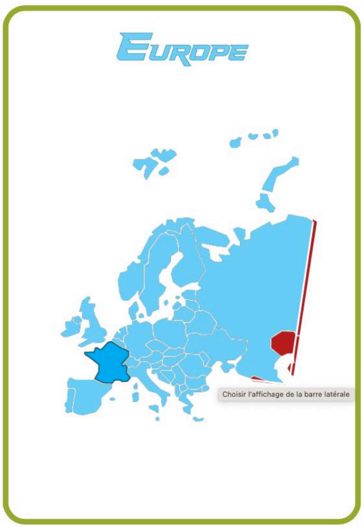
Céline Fauvinet et Renaud Couder
Collège Louis de Fontanes - Niort

> Céline Fauvinet a partagé avec les membres du groupe « Jeux » national la photo de la réalisation de ses élèves. Un Lorrain membre du groupe a eu envie de poursuivre le partage. En vue d'une évocation dans le Petit Vert, il lui été demandé de nous en dire un peu plus à propos de ce qui avait été fait dans les classes.

L'activité présentée a été mise en œuvre en mars 2023 dans le cadre de la Semaine des Mathématiques. Le thème « Maths à la carte » donnait envie d'utiliser des cartes de géographie. Ce projet est né d'une volonté d'échange entre niveaux. Il nous a permis de travailler les différentes méthodes permettant de définir un triangle de façon unique pour les cinquièmes, la lecture de figure d'étude et la construction pour les sixièmes.

Un diaporama a été présenté aux élèves de cinquième leur expliquant le recouvrement de l'Amérique du sud par des triangles.





Un livret de travail présentait les cartes à recouvrir.

Retour au sommaire

Le diaporama et le livret de travail seront bientôt accessibles à partir de notre site.

Chaque îlot a travaillé sur un continent. Les élèves ont recouvert leur document d'un papier calque puis ils y ont tracé des triangles afin de recouvrir au mieux le dessin du continent. Ils ont ensuite pris les mesures nécessaires pour que les élèves de sixième puissent faire les constructions.

Les meilleurs tracés ont été sélectionnés par les élèves de 6ème. Par îlot, les élèves d'une première classe de sixièmes ont commencé la construction des triangles, une deuxième classe a pris le relais pour continuer les tracés. Ils se sont entraidés, toute construction devant être vérifiée par un second élève. L'enseignante s'est chargée au fur et à mesure du découpage des triangles. Les élèves ont ensuite collé les triangles sur du bristol au couleurs contrastés.

Pour la réalisation finale, un vieux tableau en liège a été récupéré. Il n'était pas aux bonnes dimensions mais a fait l'affaire (il ne faut pas être trop regardant à propos des distances entre les continents…).

Pour la réalisation des triangles, le matériel en stock au collège a été mis à contribution : des feuilles A4 couleur en 160g et A3 couleur en 220g ont servi de support aux continents.
Les élèves ont collé leurs triangles en laissant systématiquement un espace entre les triangles.

Remarque du comité de rédaction du Petit Vert
Cette photo de la réalisation obtenue donne envie de reproduire l'activité collaborative à bien d'autres moments.

Retour au sommaire

QUART D'HEURE DE LECTURE

Laetitia Ludwigs
Collège Jacques Gruber Colombey-les-Belles

Afin d'encourager les élèves à lire régulièrement, les collèges sont incités à organiser régulièrement des temps banalisés du type « Quart d'heure de lecture ». (Lien Eduscol : https://eduscol.education.fr/3757/le-quart-d-heure-lecture)

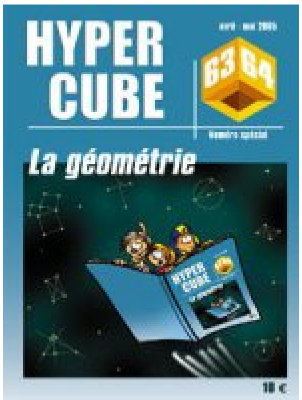
Chaque établissement a son propre fonctionnement. Au Collège Jacques Gruber, l'accent a été mis sur la régularité de l'action et la multiplicité des intervenants.

Afin que les élèves puissent donner du sens à cette initiative, il est important que chaque membre de la communauté éducative s'y investisse. Cependant en tant qu'enseignant de mathématiques, on peut parfois ressentir une impression de temps perdu. Or développer les compétences de lecture et de compréhension de textes écrits de nos élèves ne peut qu'être bénéfique à notre enseignement.

Mais comment faire afin d'impliquer pleinement les mathématiques dans ce temps de lecture ?

Des propositions de lecture

Un partenariat avec le CDI est très important. Les enseignants de mathématiques peuvent mettre à disposition dans leurs classes des ouvrages en lien avec les mathématiques. Il en existe de nombreux, de toutes formes : bandes dessinées, magazines, romans….



Mais si on veut vraiment susciter l'envie de les lire chez nos élèves, il ne faut pas se limiter à mettre des livres à disposition, il faut leur en présenter des extraits. Cela peut être fait lors de nos questions flashs (découverte d'un article de magazine) où un extrait peut illustrer nos cours, nos activités….

Retour au sommaire

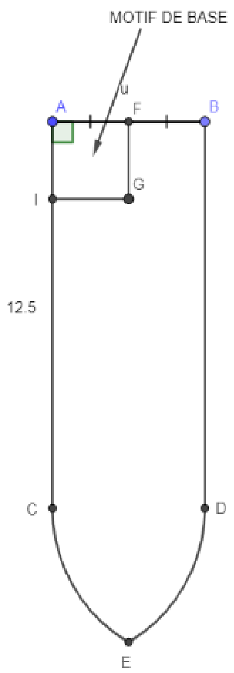
Marque-Page

Les mathématiques peuvent également trouver leur place dans cette activité grâce à la fabrication d'accessoires tels qu'un marque-page.

Le travail proposé a été réalisé avec l'ensemble des 4e du collège par chaque professeur de mathématiques. L'objectif disciplinaire est de réinvestir les transformations géométriques (symétries, translations) et les frises.

Dans un premier temps en classe, les élèves ont à leur disposition les quatre documents ci-dessous :

Document 1 : ***La forme***



Document 2 : ***Informations géométriques***

- AB = 5 cm
- AC = 12,5 cm
- F est le milieu de [AB]
- C est le centre de l'un des arcs de cercle
- D est le centre de l'autre arc de cercle.
- AFGI est un carré

Document 3 : ***La frise***

Définition :
Une **frise** est une figure géométrique constituée **d'un motif de base** reproduit dans une seule direction par des translations et/ou des symétries.

Exemples :

Retour au sommaire

Document 4 : *Le décor*

1. Le marque-page est décoré par une frise obtenue en utilisant uniquement la translation
2. Le motif de base (couleurs incluses) ne possède pas de centre de symétrie, ni d'axe de symétrie
3. Le motif de base est placé comme dans le document 1.
4. La frise se poursuit partiellement dans la pointe du marque-page ; c'est-à-dire qu'il ne sera pas « arrêté » par les arrondis du bout du marque-page (rien ne dépasse, et le motif de base continue comme précédemment).

Ils doivent alors construire leurs marques pages en suivant les consignes ci-dessous :

Mon joli marque-page

Votre travail : Réaliser un marque-page en respectant bien les consignes ci-dessous :

1. Prendre une feuille unie (blanche ou colorée)
2. Reproduire la forme du marque-page
3. Créer un motif de base dans l'emplacement prévu et en respectant les contraintes données
4. Décorer le marque-page avec une frise
5. Mettre en couleurs le marque-page, en respectant les couleurs choisies pour le motif de base
6. Découper soigneusement le marque-page
7. Ecrire son nom, son prénom et sa classe au dos du marque-page.
8. Rendre le sujet et le marque-page (séparément, sans coller) à la date donnée par le professeur

Ils prennent connaissance du sujet et peuvent communiquer avec les camarades de l'îlot, et le professeur. Ainsi chacun s'approprie le sujet : les consignes et le vocabulaire sont expliqués si besoin, un brouillon peut être démarré, ….

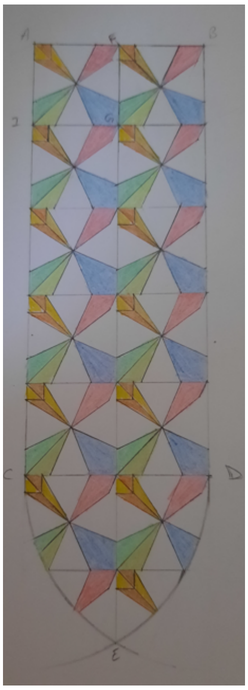
Le travail est ensuite à poursuivre en devoir maison. Ils disposent d'une semaine pour le réaliser. Un temps d'échange est prévu quelques jours avant la date de retour afin qu'ils puissent poser des questions s'il y en a, présenter leurs idées pour vérification, ….

Les élèves présentant des troubles de graphie, de praxie ou autre les mettant en difficultés face à ce type de tâche, peuvent faire ce même travail sur Geogebra. Cependant il est important que les élèves maitrisent bien le logiciel et qu'une séance de TP ait été faite au préalable afin qu'ils découvrent la commande « translation » du logiciel. Le travail est rendu sur clé, afin de vérifier une bonne utilisation de celui-ci. Afin que l'élève ait également son marque page, celui-ci est imprimé.

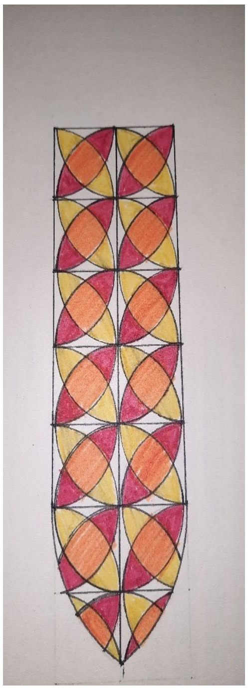
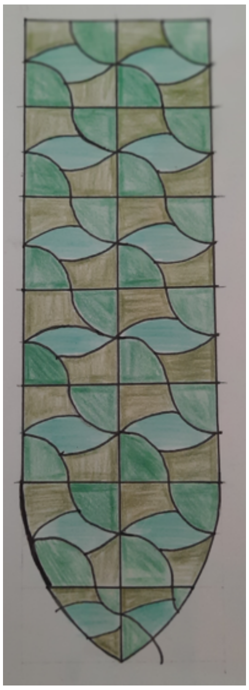
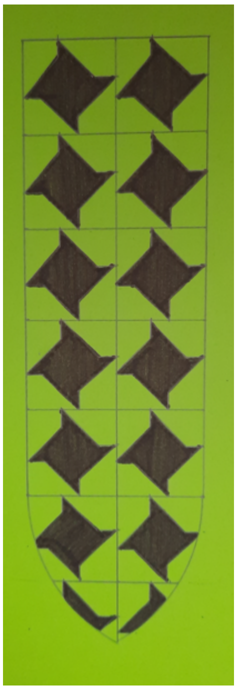
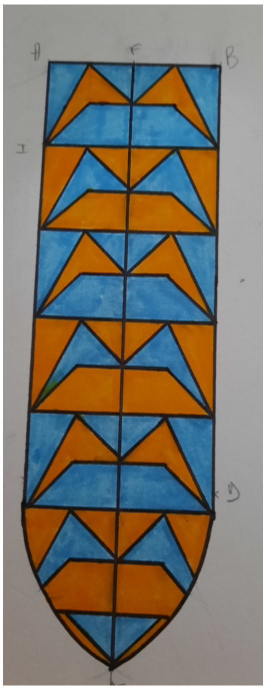
Retour au sommaire

Des réalisations d'élèves





Des marque-pages dont le motif de base présente un axe ou un centre de symétrie ou dont la translation n'est pas la seule transformation utilisée pour la construction de la frise :

Tout un travail de remédiation peut en découler en s'appuyant sur ces productions. Avec mes classes, cela a été fait au moment de la remise des devoirs. Les élèves ont reçu leur grille d'évaluation :

Retour au sommaire

4 DM Marque-Page Compé-tences	**Niveau 4 Très bien**	**Niveau 3 Satisfaisant**	**Niveau 2 Fragile**	**Niveau 1 Insuffisant**
Compétence transversale : Organiser son travail personnel				
Coeff1	L'élève a organisé son travail personnel afin de préparer ce devoir et a rendu son travail complet à la date demandée. Le travail rendu est soigné, le polycopié est rendu, le crayon de papier est utilisé pour les constructions. + Une mise en couleur est réalisée.	L'élève a organisé son travail personnel afin de préparer ce devoir mais une partie n'est pas rendue à la date demandée. Ou elle est faite en classe (collage de l'énoncé par exemple) Ou l'une des autres conditions n'est pas respectée.	L'élève a organisé son travail personnel mais n'a pas rendu son devoir à la date demandée.	Aucun des éléments précédents.
Chercher				
Ch1. Et Ch2. **Coeff 2.**	Les critères suivants sont respectés : • Frise présente • Pas de centre / d'axe de symétrie dans le motif de base • Translation utilisée • Frise poursuivie dans la pointe.	Un des critères suivants non respectés : • Frise présente • Pas de centre / d'axe de symétrie dans le motif de base • Translation utilisée • Frise poursuivie dans la pointe.	Deux des critères suivants non respectés : • Frise présente • Pas de centre / d'axe de symétrie dans le motif de base • Translation utilisée • Frise poursuivie dans la pointe.	Aucun des éléments précédents.
Représenter				
Rep 6. Coeff 3	Les critères suivants sont respectés : • Dimensions respectées • Tracés précis • Bonne utilisation de la translation	Les tracés sont imprécis et les autres critères sont respectés.	Un des critères précédents, en plus de l'imprécision des tracés, est non respecté.	Aucun des éléments précédents.

Ils peuvent ainsi facilement identifier ce qui manque et/ou est à corriger. Les élèves disposés par îlots peuvent s'entraider, ils notent sur leur cahier ce qui est à corriger, font parfois un motif de base en modifiant leur travail afin de répondre aux consignes. Le professeur passe entre les groupes pour répondre aux différentes interrogations.
C'est une manière d'aborder les tracés de géométrie de façon ludique.

Le marque-page réalisé par les élèves peut ensuite être plastifié. Il n'est pas rare d'observer leur utilisation lors du quart d'heure de lecture.

Retour au sommaire

Dans nos Classes

ORAL EN SECONDE

Gilles Waehren
Lycée Pange - Sarreguemines

1 Contexte

Dans le cadre d'une formation locale à l'hétérogénéité, j'ai été amené à m'impliquer dans une observation croisée. L'un des objectifs de cette formation était d'aider les enseignants à introduire davantage de différenciation dans leurs pratiques. Regroupant des collègues du primaire et du secondaire, l'une des activités proposées consistait à suivre une séance d'un.e autre collègue dans l'une de ses classes. Pour préparer cette observation, il nous a fallu construire, par groupe de quatre, une grille propre à analyser les éléments de mise en œuvre d'une prise en compte de l'hétérogénéité des élèves. Puis, il s'est agi de trouver un.e collègue prêt.e à nous accueillir dans sa classe (et réciproquement). Devant la perplexité des membres de mon groupe, je suis allé chercher ailleurs et ai trouvé, en la personne d'une ancienne maman d'élève, enseignante de Sciences de la Vie et de la Terre, une collègue intéressée par cette expérience. Les dates des deux visites ont été programmées dès ce moment, pour pouvoir faire l'objet d'un ordre de mission.

2 Visite en collège

Je me suis ainsi rendu, début janvier 2023, dans un collège des environs de Sarreguemines, pour suivre une même activité d'investigation dans deux classes de Troisième. Les élèves devaient, sur la base de documents et d'observations au microscope, construire un diagnostic pour expliquer à un malade la nature de sa pathologie. Par groupes de 3 ou 4, hétérogènes contenant un élément performant, ils travaillaient en autonomie et s'organisaient tant bien que mal. L'enseignante avait préparé des aides adaptées, progressives, mais payantes à partir de la quatrième.

Peu avant la séance, elle m'avait transmis les documents-élèves ainsi que la grille d'observation qu'elle souhaitait que j'utilise. Celle-ci était assez différente de celle à laquelle j'avais contribué et semblait plus propice à la visite d'un stagiaire en situation qu'à l'observation d'une séance de gestion de l'hétérogénéité. Pour cette première expérience, j'ai préféré utiliser celle choisie par ma collègue.

Les élèves n'avaient pas une grande habitude de cette façon de fonctionner et n'ont quasiment pas utilisé les petites aides. Ils ont souvent sollicité, très naturellement, les professeurs – moi y compris !! - dès qu'ils rencontraient un blocage. Leur professeure y répondait d'autant plus volontiers qu'elle souhaitait qu'ils avancent dans l'activité. Il est vrai qu'en Troisième, comme en Terminale, les examens imposent un certain rythme et que les expérimentations

Retour au sommaire

pédagogiques se compensent souvent par une vitesse accrue sur certaines parties des programmes d'enseignement. Il a tout de même fallu leur accorder une prolongation d'une demi-heure prise sur la séance suivante. J'ai ainsi suivi deux classes de Troisième de niveau légèrement différent (constaté et constatable).

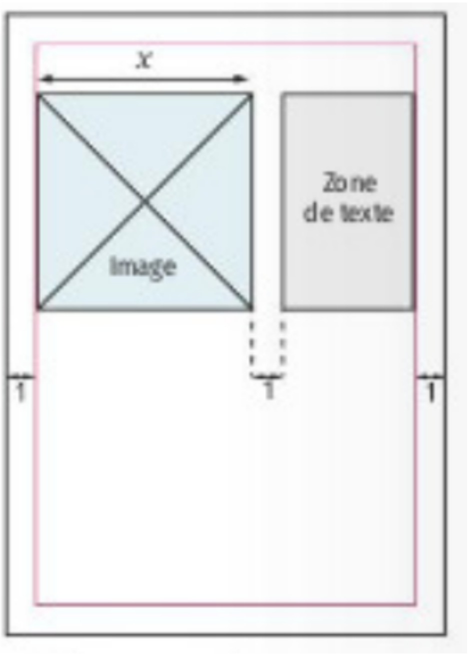
3 Préparation de ma séance

L'observation réciproque était programmée pour le mois de mars. Pour la séance que j'avais à préparer dans ma classe, j'avais décidé de m'inspirer du travail de ma collègue, en prévoyant une répartition en groupe et des aides adaptées. J'avais prévu de faire des groupes principalement homogènes. Tenant compte de ma progression, je voulais, dans un premier temps, proposer la résolution d'un même problème de géométrie utilisant trois méthodes (notamment vectorielle et analytique) et dont la difficulté tiendrait compte du niveau des élèves. Le temps avançant, il a fallu envisager une autre activité. Mon objectif de différenciation n'était pas tant de leur faire résoudre un même problème que de travailler la compétence « Modéliser » sur des problèmes de difficultés variées. Mon organisation se précisant, les situations de résolutions graphiques d'inéquations fonctionnelles se sont imposées comme cadre de travail. J'ai alors commencé à chercher des problèmes dont l'énoncé ne comportait qu'une question et dont la réponse était issue de la résolution d'une inéquation ; aucune méthode n'était imposée. Ensuite, je me suis posé la question de la restitution du travail de recherche. Dans une formation sur l'entraînement à l'oral au lycée, nous avions envisagé l'exposé à plusieurs comme un bon moyen de s'investir progressivement dans cet apprentissage. La classe étant en demi-groupe au moment choisi, j'ai réparti les élèves en 5 groupes de trois ou quatre élèves de niveau comparable et choisi un problème différent par groupe. Mon intention était que la présentation ne soit pas trop répétitive, mais qu'on puisse voir les points communs des résolutions. Les problèmes, dont l'énoncé complet est donné en annexe, étaient les suivants :

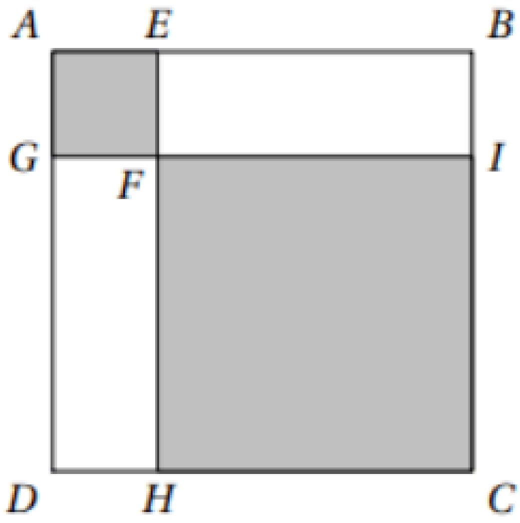
- comparaison des salaires de deux footballeurs (publié dans le Petit Vert 132) ;
- dimension d'un cadre de texte sur une feuille A4 (trouvé sur Internet) ;
- aires de deux carrés inscrits dans un troisième (trouvé sur Internet) ;
- déplacement contraint dans un jardin (issu d'un manuel de Seconde) ;
- vitesse limite sur un aller-retour à vélo (un classique)

Retour au sommaire

Dimension d'un cadre de texte

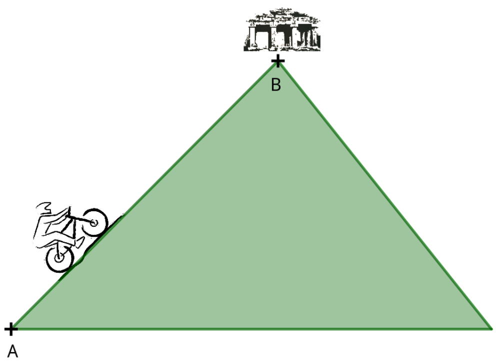


Deux carrés dans un troisième



Problème du jardinier

L'aller-retour à vélo



Le document-élève était complété par des consignes de travail et le mode d'évaluation orale : les mêmes pour tous (voir annexe).

Pour ne pas perdre de temps à répartir les élèves, je leur avais communiqué la composition des groupes dans le cahier de textes quelques jours auparavant. N'ayant pas cours avant de les recevoir, j'avais aussi pris le temps de rassembler les tables de la salle puis d'accueillir ma collègue.

4 Déroulé du travail de recherche

Il a fallu, dès le début de chaque heure, réorganiser les groupes. En effet, beaucoup d'élèves étaient absents en raison d'un grand nombre de professeurs grévistes ce jour-là. Ainsi, au lieu de groupes de 17 élèves, n'en ai-je eu qu'une petite douzaine à chaque séance. J'ai tenu compte du niveau du problème à résoudre et des élèves pour refaire les groupes, mais certains étaient moins homogènes.

Après une présentation de l'observatrice et une explication du travail à mener et de son cadre, les élèves se sont mis à la lecture des énoncés. C'est une classe de Seconde très agréable, dont même les élèves les plus en difficulté ne rechignent pas à la tâche. La confiance s'est établie très tôt dans l'année et leur adhésion à cette nouvelle façon de travailler me semblait acquise. Car il faut dire que, si cette expérience de travail de groupe ne m'est pas complètement étrangère, les quelques tentatives qui ont émaillé ma carrière ne m'ont pas toujours satisfait. Je n'ai jamais vraiment trouvé de méthode pour impliquer tous les élèves d'un groupe dans le travail, même en attribuant des missions aux différents membres.

Ainsi, après un temps d'organisation et de lecture active, ils se sont engagés dans la résolution. Nous circulions entre les tables à l'écoute de leurs conciliabules. On a pu retrouver chez certains élèves l'envie de répondre au problème en peu de temps ou avec une méthode toute prête. Comme lors de ma visite en collège, les élèves ont préféré faire appel aux professeurs plutôt que d'aller chercher les aides mises à disposition. Ma collègue s'est fortement sentie impliquée par la réussite des élèves dans la résolution du problème et a souvent motivé, relancé les groupes. Son aisance avec les mathématiques étant plus grande que la mienne avec les SVT, elle a été d'un soutien appréciable. Toutefois, j'ai pris le temps de lui exposer mon attente en terme de temps de recherche chez les élèves : il me semblait plus important qu'ils prennent le temps de comprendre et d'explorer que de rédiger une solution aboutie. Elle m'a fait remarquer, à juste titre, que, et c'est un combat qui est mené pendant tout le collège, nos élèves renâclent à traduire par écrit leurs idées et mettre sur papier leurs traces de recherche.

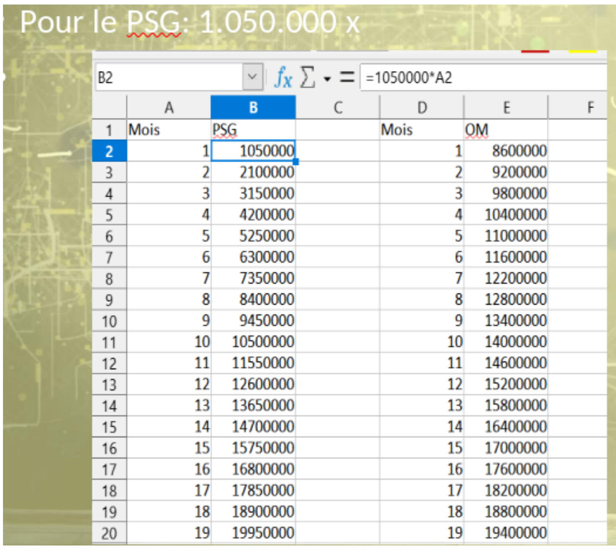
Pour quatre des problèmes, la variable induite par l'énoncé a été mise en évidence au bout de quelques minutes et désignée par une lettre. L'expression de la fonction sous-jacente a nécessité plus de temps et l'inéquation a émergé peu avant la fin de l'heure. Pour le problème du football, le recours au tableur s'est imposé après quelques temps de recherche et la formalisation algébrique n'a pas été faite. Un groupe s'est contenté de comparer les valeurs du tableau. Le deuxième est allé jusqu'à la représentation graphique. C'est d'ailleurs le seul cas où la résolution graphique de l'inéquation a été présentée. Le problème du vélo a donné du fil à retordre à des élèves d'ordinaire plus performants, la vitesse moyenne sur un aller-retour ayant d'abord été interprétée comme la moyenne des vitesses. Sans trop les guider, nous avons régulièrement corrigé les erreurs de raisonnement de ce groupe.

À la sonnerie, excepté le problème des footballeurs, les quatre autres n'étaient pas encore résolus, mais au moins les groupes sont-ils repartis avec une inéquation à résoudre. La seule consigne donnée était de préparer une présentation orale pour la semaine suivante. Ceux qui le souhaitaient pouvaient encore poser des questions ou disposer des aides non utilisées pour terminer leur résolution pendant la semaine. Quelques élèves ont sollicité mon aide pour des ajustements. Les élèves absents ce jour-là ont été dispensés de ce travail de restitution.

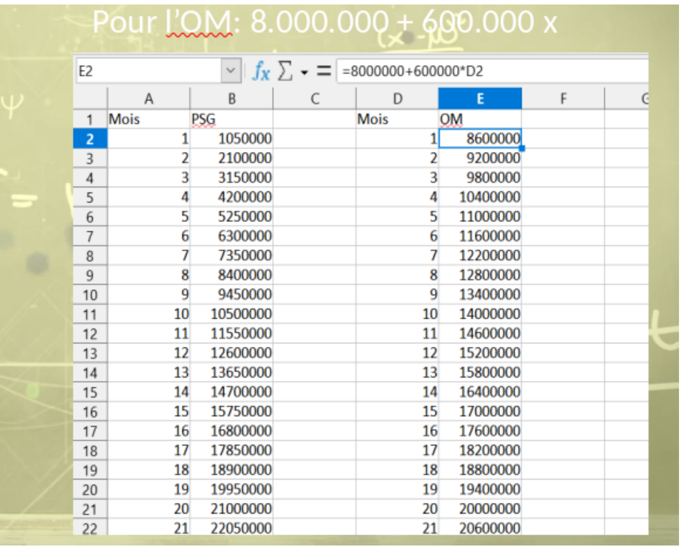
5 Présentation orale

Le jour de la présentation, la préparation s'est avérée assez inégale selon les groupes. Un certain nombre d'entre eux avaient pris le temps de faire un diaporama ; ce qui montre leur investissement. Un élève absent a même grandement contribué à la création des planches. Deux groupes se sont contentés de reprendre leurs notes pour leur exposé. Cette approche, a priori plus brouillonne, a permis de mettre en avant les pistes explorées et abandonnées, produisant un échange plus riche que l'affichage un peu figé de quelques diapos. Un certain nombre d'erreurs, de calcul principalement, a ponctué les récits : elles ont été corrigées rapidement pour conserver un rythme dans la séance. Dans chaque groupe, la parole a tourné (pendant 5 minutes chronométrées) entre les élèves ; la note, globale, a été calculée sur les critères proposés dans le document-élève et attribuée sans distinction. Le groupe sur le vélo a fait une résolution entièrement algébrique. Le groupe sur le jardin a eu recours à un tableau de valeurs. Les groupes sur les carrés n'ont pas obtenu d'intervalle de solutions. Dans la plupart des cas, j'ai ouvert GeoGebra pour terminer la résolution, achevant ainsi le lien entre les différents problèmes. (ajouter synthèse des travaux d'élèves)

Le diaporama sur les comparaisons de salaires a été conçu par un élève absent à la séance de préparation. La présentation a été dynamique. Les expressions des fonctions ont été bien identifiées. Contrairement aux autres problèmes, l'inéquation était de la forme $f(x) \leqslant g(x)$ au lieu de $f(x) \leqslant k$, mais le contexte spécifique leur a permis d'envisager une méthode de résolution. Par ailleurs, le traitement de fonctions affines - même si le chapitre n'avait pas encore été le sujet de rappels – s'est fait naturellement.

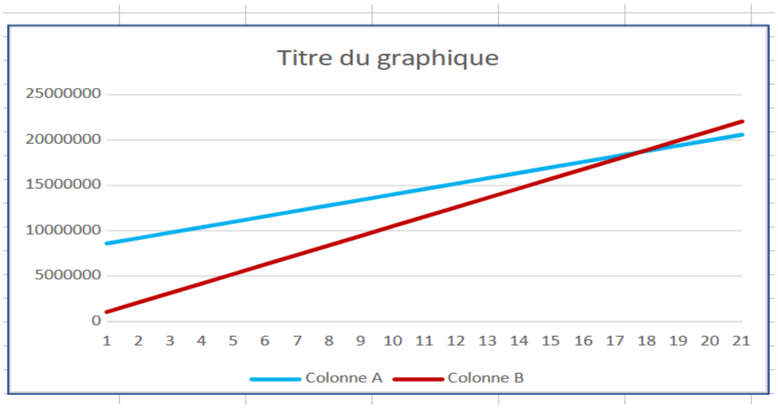


	A	B	C	D	E	F
1	Mois	PSG		Mois	OM	
2	1	1050000		1	8600000	
3	2	2100000		2	9200000	
4	3	3150000		3	9800000	
5	4	4200000		4	10400000	
6	5	5250000		5	11000000	
7	6	6300000		6	11600000	
8	7	7350000		7	12200000	
9	8	8400000		8	12800000	
10	9	9450000		9	13400000	
11	10	10500000		10	14000000	
12	11	11550000		11	14600000	
13	12	12600000		12	15200000	
14	13	13650000		13	15800000	
15	14	14700000		14	16400000	
16	15	15750000		15	17000000	
17	16	16800000		16	17600000	
18	17	17850000		17	18200000	
19	18	18900000		18	18800000	
20	19	19950000		19	19400000	



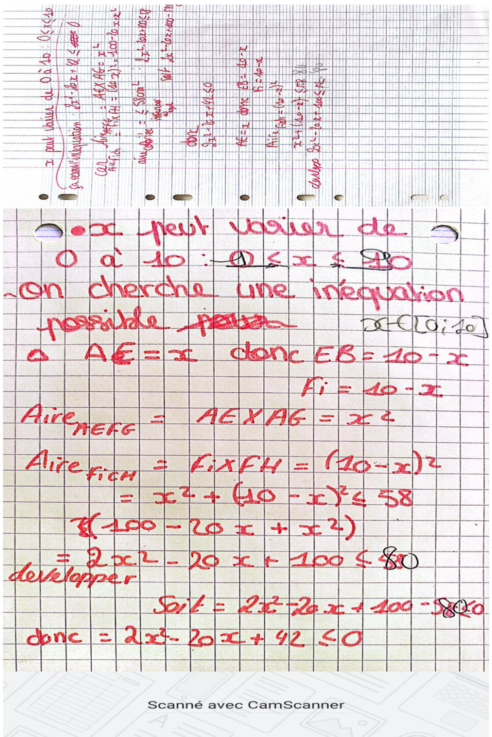
	A	B	C	D	E	F
1	Mois	PSG		Mois	OM	
2	1	1050000		1	8600000	
3	2	2100000		2	9200000	
4	3	3150000		3	9800000	
5	4	4200000		4	10400000	
6	5	5250000		5	11000000	
7	6	6300000		6	11600000	
8	7	7350000		7	12200000	
9	8	8400000		8	12800000	
10	9	9450000		9	13400000	
11	10	10500000		10	14000000	
12	11	11550000		11	14600000	
13	12	12600000		12	15200000	
14	13	13650000		13	15800000	
15	14	14700000		14	16400000	
16	15	15750000		15	17000000	
17	16	16800000		16	17600000	
18	17	17850000		17	18200000	
19	18	18900000		18	18800000	
20	19	19950000		19	19400000	
21	20	21000000		20	20000000	
22	21	22050000		21	20600000	

Le couple de copies d'écran a permis de faire apparaître la transition entre l'expression de la fonction et la formule tableur. Deux groupes avaient abordé, pendant chacune des deux heures, ce problème. Mais seul celui qui m'a confié son document numérique a poussé le raisonnement jusqu'à faire afficher les courbes des fonctions pour affiner sa résolution :
La présentation comportait encore une diapo pour le sommaire et une pour la conclusion.



Retour au sommaire

Élisa et Noah n'ont pas fait de présentation et m'ont confié leur synthèse écrite (ci-contre). Elle comporte encore des correction et a pu être étayée par l'aide d'une tierce personne. En tout cas, ils sont restés sur l'inéquation qu'ils n'ont pas résolue. Leurs explications ont également traduit leurs errements.


• x peut varier de 0 à 10 : $0 \leq x \leq 10$

On cherche une inéquation possible ~~peu~~ $x \in [0;10]$

AE = x donc EB = 10 − x

Fi = 10 − x

$Aire_{AEFG} = AE \times AG = x^2$

$Aire_{FiCH} = Fi \times FH = (10-x)^2$

$= x^2 + (10-x)^2 \leq 58$

$x^2 (100 - 20x + x^2)$

développer $= 2x^2 - 20x + 100 \leq 80$

Soit $= 2x^2 - 20x + 100 - 58 \leq 0$

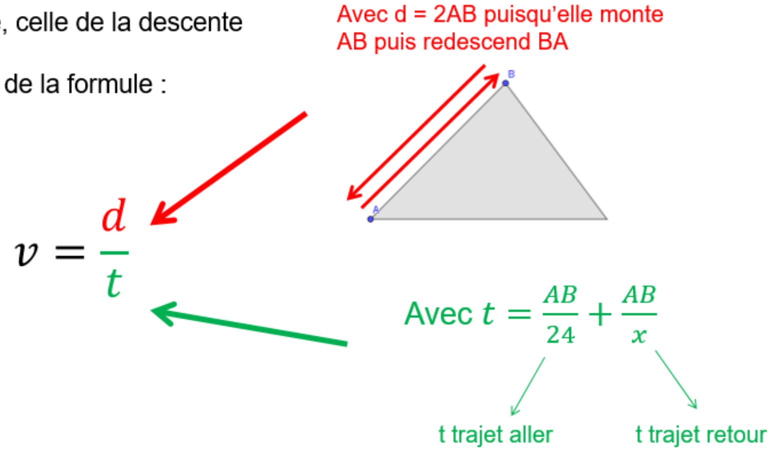
donc $= 2x^2 - 20x + 42 \leq 0$

Scanné avec CamScanner

Pour le problème d'allers-retours, une résolution complète assez experte a été conduite de façon « magistrale ».

On cherche ici une vitesse, celle de la descente

Nous nous servirons donc de la formule :



La schématisation avait certes été facilitée par les nombreuses indications fournies, mais les calculs ont été menés en autonomie :

$$v = \frac{2AB}{\frac{AB}{24} + \frac{AB}{x}} \geq 30$$

$$= \frac{2AB}{\frac{ABx}{24x} + \frac{24AB}{24x}} \geq 30$$

$$= 18x \geq 720$$

$$= \frac{18x}{18} \geq \frac{720}{18}$$

$$= x \geq 40$$

Pour que la vitesse moyenne sur le parcours soit d'au moins 30km/h, il faut que la vitesse de Nadia sur cette descente soit supérieur ou égal à 40km/h.

On peut penser que l'inéquation n'était pas suffisamment difficile algébriquement ou se demander si le fait de ne pas avoir donné la longueur du trajet les a incités à ne pas procéder à un traitement informatique. En tout cas, n'ayant rien imposé dans la méthode, cette manière de faire, sans

Retour au sommaire

résolution graphique, reste tout à fait recevable. On appréciera le travail de mise en forme des équations.
Pour le problème du jardinier, un gestion algébrique du problème s'avérait plus délicate.

> Dominique doit parcourir la distance entre la maison est la rivière est l'hypoténuses d'un triangle rectangle, tout comme la distance entre la rivière et le jardin. Donc, la distance totale que Dominique doit parcourir est la somme des deux hypoténuses.
>
> $d(x) = V(x^2+4^2) + V((x-6)^2+2^2)$
> $d(x) = V(x^2+16) + v(x^2-12x+36+4)$
> $d(x) = V(x^2+16) + V(x^2-12x+40)$

La rédaction fait un bon résumé des recherches entreprises, mais l'éditeur mathématique ne s'est pas imposé (il était précisé que la lettre V désignait la racine carrée). L'inéquation n'a pas été formulée. La solution est issue d'un tableau de valeurs. Il a fallu mettre en évidence les lacunes entre les nombres et, par conséquent, celles du raisonnement.

> Dominique peut parcourir une distance
> Inférieur à 9 mètre entre l' intervalle
> $2<x<5.5$

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
d(x)	10,32	9,88	9,51	9,20	8,94	8,75	8,61	8,52	8,49	8,52	8,64	8,86	9,21

(illustration ajoutée par les élèves)

Une certaine satisfaction a pu être relevée chez beaucoup d'élèves dans cette façon de travailler. J'avais essayé de mettre en œuvre un cadre précis, mais, incertain du résultat final, je n'avais pas d'exigences trop importantes sur la forme finale du travail. La compétence de modélisation, objectif de mon activité, n'est pas la plus simple à entretenir ; il était donc prévisible que certains groupes n'aient pu trouver l'intervalle de solutions attendu. Les problèmes proposés permettaient également d'aborder les 5 autres compétences, avec, comme point d'orgue, la communication orale et écrite (avec le support du diaporama). L'exercice oral n'est pas chose aisée en mathématiques, au point de pénaliser certains bons élèves au Grand Oral. On peut le développer assez tôt, et pas seulement sous la forme d'interrogation ou d'exercices au tableau ; mais cela reste une activité chronophage pour laquelle on peut choisir les présentations par groupe, en Seconde en tout cas. Je dois avouer que j'appréhendais un peu ce que les élèves allaient produire et leur motivation a fait plaisir à voir. Je ne sais pas si, élève de Seconde, j'aurais produit un discours aussi consistant.

6 Bilan

Du point de vue mathématique, le travail des élèves a donné un sentiment d'inachevé puisque l'objectif méthodologique (implicite certes) de la résolution d'inéquation n'a pas été atteint.

Retour au sommaire

Du point de vue didactique, le réinvestissement de ce qui a été vu à la séance précédente sur la résolution graphique n'a pas été fait. Peut-être que l'une des difficultés principales de l'activité mathématique est notre capacité à faire des liens entre des choses qui n'ont rien en commun. Le cloisonnement, rassurant, entre les domaines, que font certains élèves, ne facilite pas l'apprentissage. Enfin, du point de vue pédagogique, cette séance m'a vraiment donné envie de recommencer ces travaux de groupes mobilisant les compétences mathématiques.

Concernant le travail de différenciation, la stratégie adoptée a, au moins, permis à tous les élèves de s'investir dans le travail. Je pense qu'en donnant des problèmes différents avec un but notionnel et méthodologique commun, on peut aussi bien différencier qu'en proposant un étayage élaboré pour un même problème. Il m'a semblé important de définir cette ligne d'horizon dès le départ. Pour que les élèves produisent un résultat plus abouti, il aurait fallu qu'ils aient davantage recours aux petites aides (voir en annexe). Mais pour cela, j'aurais dû les y habituer plus tôt.

La préparation de cette séance d'observation a probablement été plus longue que celle d'une inspection. On peut invoquer deux raisons pour cela : un délai plus long et l'envie de réussir cette expérience nouvelle. Bien sûr, on pourrait objecter qu'il serait plus productif d'observer un.e collègue sur une séance plus ordinaire. En tout cas, en croisant les matières et les pratiques, cette première tentative mériterait d'être poursuivie.

Le bilan des séances menées dans le groupe de formation a été entrepris lors d'une deuxième période de formation, au cours de laquelle chacun a pu prendre connaissance de ce que les autres avaient entrepris et poser des questions complémentaires, souvent posées par les formateurs. Les stratégies de différenciation ont été identifiées et les points de progression énoncés. Comme ce n'était pas la ligne directrice de cette formation, l'observation croisée n'a pas fait l'objet de débat.

Pour que les élèves puissent produire le résultat que j'attendais, il aurait fallu leur accorder une demi-heure de recherche supplémentaire, une demi-heure pour la préparation de leur oral et enfin, dans une troisième séance, une demi-heure pour entendre les 5 groupes. Ce n'était pas possible en cette fin mars 2023. Pour que les élèves soient plus efficaces et aussi plus autonomes en groupes, il ne faut pas limiter (comme je l'ai fait) ce type de fonctionnement à une occasion dans l'année. Mais il faut reconnaître que beaucoup d'enseignants de mathématiques comptent leurs heures en Seconde dès le mois de Janvier et les notions prennent progressivement le pas sur les compétences.

En plus des aspects organisationnels évoqués ci-avant, la séance avait également un objectif professionnel sur lequel, on peut aussi envisager des améliorations. Là encore, il me semble difficile, si on veut qu'elle soit profitable, de limiter une observation croisée à une ou deux occasions dans une carrière. La présence d'un.e collègue dans sa salle impose naturellement de se poser des questions sur ses pratiques qui doivent nécessairement évoluer. Ici, la réforme du collège de 2016 commence à faire sentir ses effets au lycée, mais les stratégies d'adaptation commencent à peine à s'élaborer. Retourner dans une classe de collège ne peut que faire du bien. Voir les méthodes d'enseignement avant la Seconde ne peut que susciter des réflexions indispensables.

Retour au sommaire

7 Annexes

7.1 Consignes communes

Problème	*Titre*
Objectif	Réaliser, en groupe, un exposé oral pour présenter la résolution du problème
Consignes	**1)** Lire l'énoncé du problème individuellement **2)** Faire une recherche au brouillon **3)** Échanger avec les autres membres du groupe **4)** Résoudre le problème **5)** Rédiger un exposé **6)** Partager le travail de présentation
Exposé	• présentation du problème, éventuellement avec un schéma • modélisation du problème : fonction, inéquation…. • représentation graphique des solutions • réponse à la question posée
Notation	• par groupe, sur l'exposé • justesse de l'explication • qualité de l'expression orale • dynamisme de la présentation
Énoncé	*Texte*

7.2 Énoncés des problèmes

Excepté pour le problème des footballeurs (qui était illustré avec les blasons de chacun des deux clubs), les figures accompagnant les énoncés sont incluses dans l'article ci-avant)

7.2.1 Rémunération de footballeurs

« Le Paris Saint-Germain (PSG) et l'Olympique de Marseille (OM) ont un point commun : ils ont tous les deux fait l'acquisition de footballeurs brésiliens, à l'été 2017. Pendant que l'OM a déboursé 8 millions d'euros pour recruter Luiz Gustavo, qui avait un salaire d'à peu près 600 000 euros par mois, le PSG a intégré gratuitement Dani Alves qui sera, lui, payé à peu près 35 000 euros par jour.
En estimant qu'un mois fait 30 jours, au bout de combien de temps le PSG aura-t-il dépensé plus que l'OM ? »

Retour au sommaire

7.2.2 Mise en page

« Sur une feuille A4 (21 × 29,7 cm), on souhaite placer une image carrée dont on peut changer la taille et une zone de texte dont la surface doit être supérieure à 80 cm². La zone de texte et l'image ont la même hauteur, sont alignés sur le haut de la page et séparées de 1cm. La page doit contenir des marges de 1 cm pour l'impression.
Comment choisir la taille de l'image ? »

7.2.3 Trois carrés

« ABCD est un carré dont les côtés mesurent 10 cm. EFGA et CHFI sont des carrés, tels que E est sur [AB].
Comment placer le point E pour que la surface colorée ait une aire inférieure à 80 cm² ? »

7.2.4 Tour à vélo

« Nadia monte le Donon à vélo, avec une vitesse moyenne de 24 km/h . Elle redescend par le même chemin.
Quelle doit être sa vitesse sur cette descente pour que la vitesse moyenne sur le parcours soit au moins 30km/h ? »

7.2.5 Optimisation de parcours

« Pour arroser ses plantations, Dominique prend l'arrosoir au coin inférieur droit de sa maison et va le remplir à la rivière avant de rejoindre son jardin.
Peut-il faire un trajet de moins de 9 mètres de longueur ? »

7.3 Aides possibles

Les aides étaient sous forme de bandes détachables, découpées au préalable, dont le contenu n'était pas visible sans récupérer la bande : toutes les lignes de la deuxième colonne étaient séparées et repliées contre la table (sauf la première)

Aide	Rémunération de footballeurs
Aide 1	Appeler x le nombre de jours écoulés depuis l'engagement des deux footballeurs.
Aide 2	Le salaire de Gustavo est $g(x) = 8000000 + 20000x$
Aide 3	Le salaire d'Alves est $a(x) = 35000x$
Aide 4	Quel est l'ensemble de définition des deux fonctions ?
Aide 5	Tracer les courbes des deux fonctions sur GeoGebra.
Aide 6	La solution est un intervalle.

Aide	Mise en page
Aide 1	Appeler x le côté du carré formant l'image
Aide 2	A L'aire de la zone de texte est : $A(x) = 18x - x^2$
Aide 3	Quel est l'ensemble de définition de A ?
Aide 4	Tracer la courbe de la fonction A sur GeoGebra.
Aide 5	La solution est un intervalle.

Retour au sommaire

Aide	Trois carrés
Aide 1	Appeler x le côté du carré EFGA
Aide 2	Le côté de CHFI est $10 - x$.
Aide 3	L'aire colorée est : $A(x) = 2x^2 - 20x + 100$
Aide 4	Quel est l'ensemble de définition de A ?
Aide 5	Tracer la courbe de la fonction A sur GeoGebra.
Aide 6	La solution est un intervalle.

Aide	Tour à vélo
Aide 1	Appeler x la vitesse moyenne en descente
Aide 2	La vitesse moyenne est le rapport de la distance par le temps de parcours.
Aide 3	La vitesse moyenne sur un aller-retour de vitesses v_1 et v_2 est : $\frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$
Aide 4	La vitesse moyenne sur l'aller-retour est : $v(x) = \frac{48x}{48 + x}$
Aide 5	Quel est l'ensemble de définition de v ?
Aide 6	Tracer la courbe de la fonction v sur GeoGebra.
Aide 7	La solution est un intervalle.

Aide	Optimisation de parcours
Aide 1	Appeler x le deuxième côté de l'angle droit du triangle rectangle dont un côté est 4 m.
Aide 2	Utiliser le théorème de Pythagore dans les deux triangles rectangles.
Aide 3	La longueur du parcours est : $f(x) = \sqrt{16 + x^2} + \sqrt{x^2 - 12x + 40}$
Aide 4	Quel est l'ensemble de définition de f ?
Aide 5	Tracer la courbe de la fonction f sur GeoGebra.
Aide 6	La solution est un intervalle.

Retour au sommaire

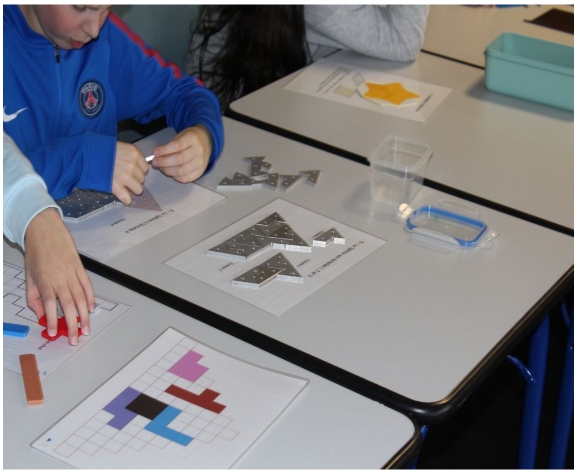
LE PREMIER PROJET DU LABOMATHS DE SARREBOURG

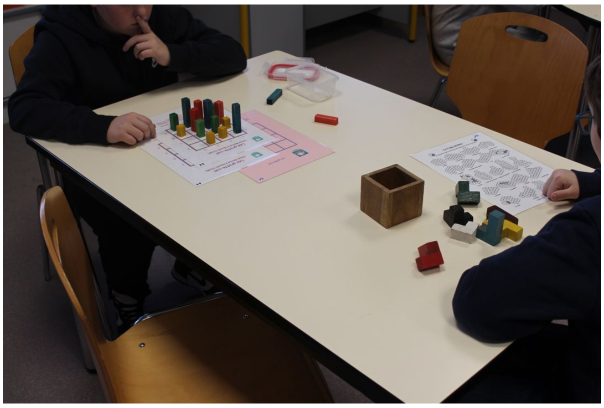
Stéphanie Waehren

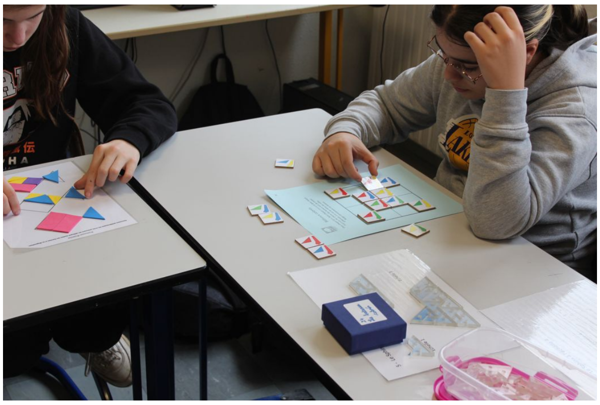
Le Labomaths de Sarrebourg a démarré, en septembre 2022, à l'initiative de professeurs du collège Messmer, dont je fais partie, en réponse à un besoin de l'équipe. Nous constatons en effet, d'année en année, que nos élèves éprouvent des difficultés à manipuler des objets : matériel de géométrie, pièces de puzzle, quadrilatères… et leur capacité à s'approprier les notions de géométrie semble en pâtir.
Le labomaths est constitué de professeurs du premier et du second degré. Ces collègues ont souhaité marquer cette année d'ouverture du Labo, par un projet rassemblant un maximum d'élèves de CM1, CM2 et Sixième du secteur de Sarrebourg.
Nous avons choisi une demi-journée de la semaine des maths, qui est notamment riche en ressources et concours, et contacté l'APMEP Lorraine pour bénéficier de ses jeux géométriques.
Le choix du concours s'est porté sur les épreuves de « Maths sans frontières », parce que l'équipe a l'habitude d'animer ce concours collaboratif. Marie-José Baliviera a accepté de se déplacer pour aider les élèves à manipuler les jeux et énigmes de l'APMEP Lorraine.
Six groupes ont ainsi été constitués, CM1, CM2 et sixièmes mélangés. Ils ont enchaîné jeux et concours dans la bonne humeur. A l'issue de la journée, une règle ALEPH a été offerte à chaque participant.

La manipulation d'objets APMEP

Retour au sommaire







Retour au sommaire

La partie « Maths sans Frontières » : un concours en collaboration.

Le bilan

Les élèves de primaire ont apprécié découvrir leur futur collège et leurs futurs professeurs (les collègues de plusieurs matières ont aidé à encadrer les groupes d'élèves). Cette demi-journée « d'immersion » réussie a rassuré nombre de parents.

Les activités proposées ont beaucoup plu, en particulier la manipulation d'objets qui permet à chaque élève de se sentir en réussite face à une tâche mathématique.

Les élèves de sixième, qui pour une fois ont eu le rôle de « grands », et ont guidé leurs plus jeunes camarades dans le collège, ont apprécié ce rôle.

Les enseignants ont tous été ravis, et un événement rassemblant davantage de matières est envisagé l'année prochaine.

Ce projet a en outre permis aux équipes de primaire et de collège d'apprendre à se connaître, à se faire confiance, pour entamer la deuxième étape du projet du Labo. Celui-ci a pour but de nous doter d'outils et d'activités communes aux 1er et 2^{d} degré pour répondre aux problèmes rencontrés par les élèves.

Retour au sommaire

ÉTUDE MATHÉMATIQUE

PAVAGE D'UN ESCALIER PAR DES L-TRIOMINOS

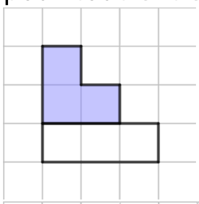
Fathi Drissi

Le plus petit escalier que l'on puisse paver avec des L-triominos est un L-triomino : c'est un escalier de taille $n = 2$.

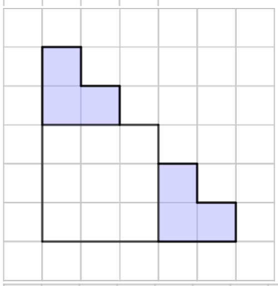
Escalier de taille n=2

Quels sont les escaliers qui peuvent être pavés par des L-triominos ?

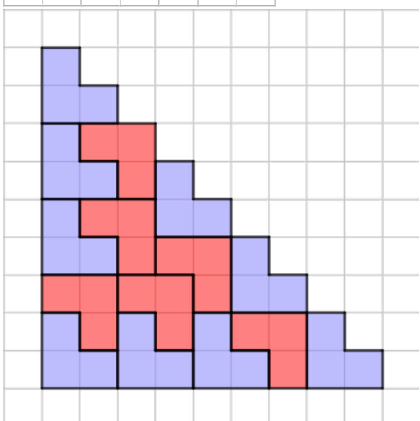
Un escalier est formé de $\frac{n(n+1)}{2}$ carrés. Donc, pour qu'il puisse être pavé par des L-triominos, il faut que $\frac{n(n+1)}{2}$ soit divisible par 3 ou encore $n(n+1)$ soit un multiple de 6, ce qui est le cas pour tout entier n congru à 0, 2, 3 ou 5 modulo 6.



Un escalier de taille 3 ne peut pas être pavé par des L-triominos.

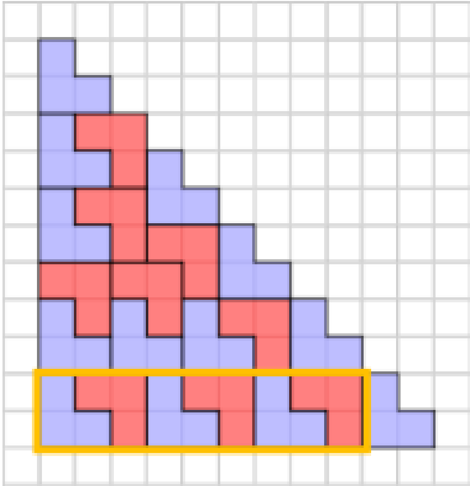


Pour un escalier de taille 5, les deux premières et les deux dernières "marches" de l'escalier doivent être recouvertes par un L-triominos comme l'indique le dessin ci-contre. Ce qui laisse un carré 3×3 que l'on sait impossible à paver par des L-triominos.



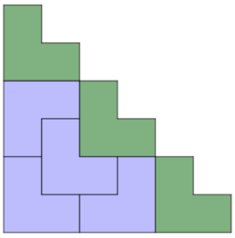
Un escalier de taille $9 = 6 \times 1 + 3$ peut être pavé par des L-triominos.

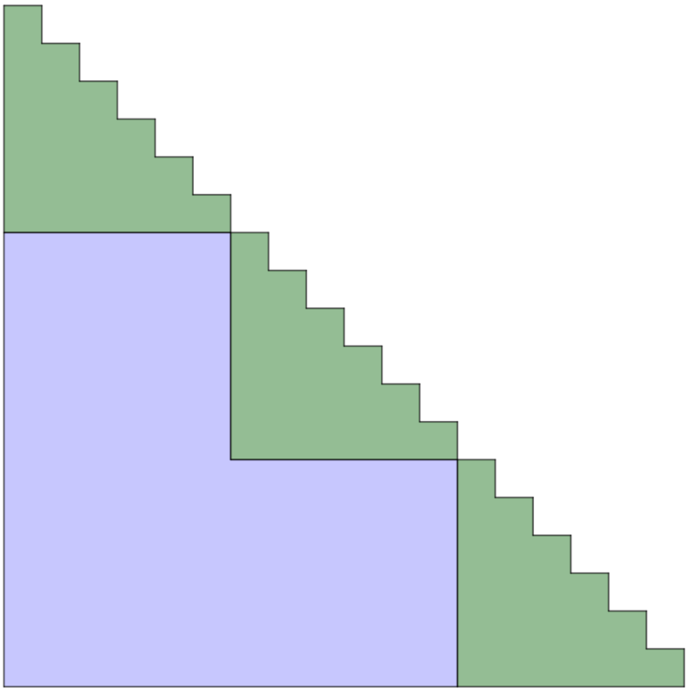
Retour au sommaire



Un escalier de taille $11 = 6 \times 1 + 5$ peut être pavé par des L-triominos. En effet, cet escalier est composé d'un escalier de taille 9, d'un rectangle 9×2 et d'un L-triomino

On peut aussi remarquer qu'un escalier de taille $n = 6$ peut être décomposé en trois L-triominos (escalier de taille 2) et un L-triomino à l'échelle 2. Il peut donc être pavé par des L-triominos.





En poursuivant le procédé ci-dessus, un escalier de taille $n = 18$ peut être décomposé en trois escaliers de taille 6 et un L-triomino à l'échelle 6. Il peut donc être pavé par des L-triominos.

En raisonnant par récurrence, ce résultat peut être généralisé aux escaliers de taille $n = 2 \times 3^p$ où p est un entier naturel. Il suffit de remarquer que $2 \times 3^{p+1} = 3 \times (2 \times 3^p)$ et donc, un escalier de taille $2 \times 3^{p+1}$ est composé de trois escaliers de taille 2×3^p et un L-triomino à l'échelle 2×3^p.

Proposition 1

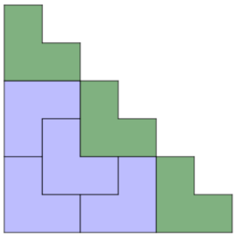
Pour tout entier naturel n non nul, un escalier de taille $6n$ peut être pavé par des L-triominos.

On va démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, un escalier de taille $6n$ peut être pavé par des L-triominos.
Pour tout entier naturel n non nul, on note $P(n)$ la propriété «Un escalier de taille $6n$ peut être pavé par des L-triominos.»

Retour au sommaire

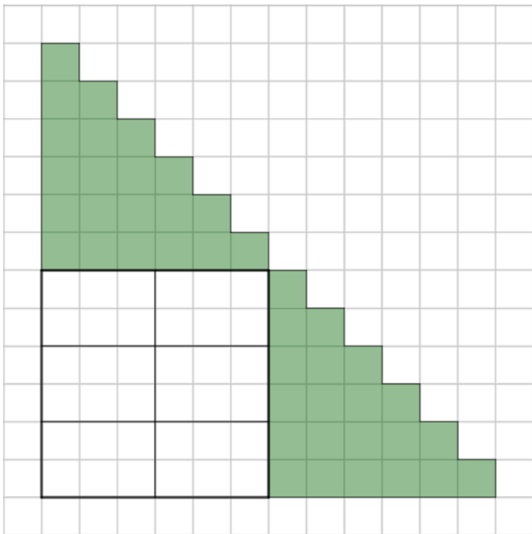
Pour $n = 1$, un escalier de taille 6 peut être pavé par des L-triominos.

La propriété est ainsi vraie pour $n = 1$.



Soit n un entier strictement positif.

On va montrer que si la propriété $P(n)$ est vraie, alors la propriété $P(n+1)$ est vraie.



Un escalier de taille $6(n+1)$ est composé d'un escalier de taille $6n$, d'un escalier de taille 6 et d'un rectangle $6 \times 6n$.

En effet :

$$\frac{6(n+1) \times (6(n+1)+1)}{2} = \frac{(6n+6) \times (6n+1+6)}{2}$$
$$= \frac{6n \times (6n+1)}{2} + \frac{6n \times 6}{2} + \frac{6 \times (6n+1)}{2} + \frac{6 \times 6}{2}$$
$$= \frac{6n \times (6n+1)}{2} + \frac{6n \times 6}{2} + \frac{6 \times 6n}{2} + \frac{6}{2} + \frac{6 \times 6}{2}$$
$$= \frac{6n \times (6n+1)}{2} + 6 \times 6n + \frac{6 \times 7}{2}$$

Or, un rectangle $6 \times 6n$ et un escalier de taille 6 peuvent être pavés par des L-triominos et d'après l'hypothèse de récurrence, un escalier de taille $6n$ peut l'être aussi.

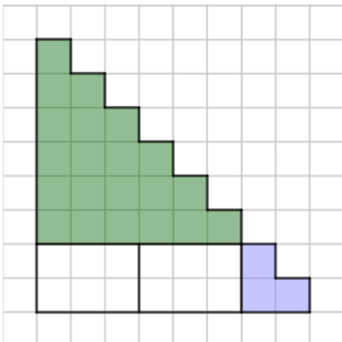
La propriété $P(n + 1)$ est donc vraie et on a hérédité.

On peut donc conclure que pour tout entier naturel n non nul, un escalier de taille $6n$ peut être pavé par des L-triominos.

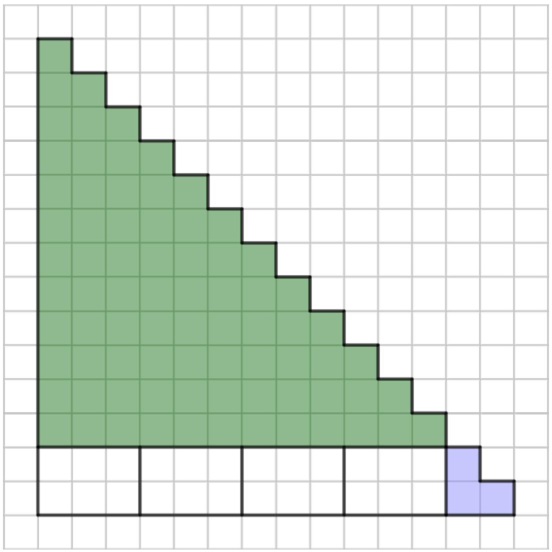
Proposition 2

Pour tout entier naturel n non nul, un escalier de taille $6n+2$ peut être pavé par des L-triominos.

Pour $n = 1$, un escalier de taille 8 peut être pavé par des L-triominos.



Retour au sommaire



Preuve

Soit n un entier strictement positif.

Un escalier de taille $6n + 2$ est composé d'un escalier de taille $6n$, d'un L-triomino et d'un rectangle $6n \times 2$.

Or, un rectangle $6n \times 2$ peut être pavé par des L-triominos et d'après la proposition 1, un escalier de taille $6n$ peut l'être aussi.

Donc, un escalier de taille $6n+2$ peut être pavé par des L-triominos.

Proposition 3

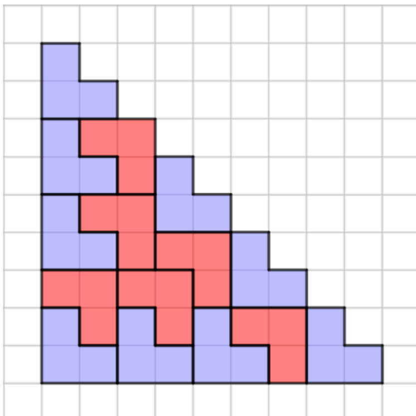
Pour tout entier naturel n non nul, un escalier de taille $6n+3$ peut être pavé par des L-triominos.

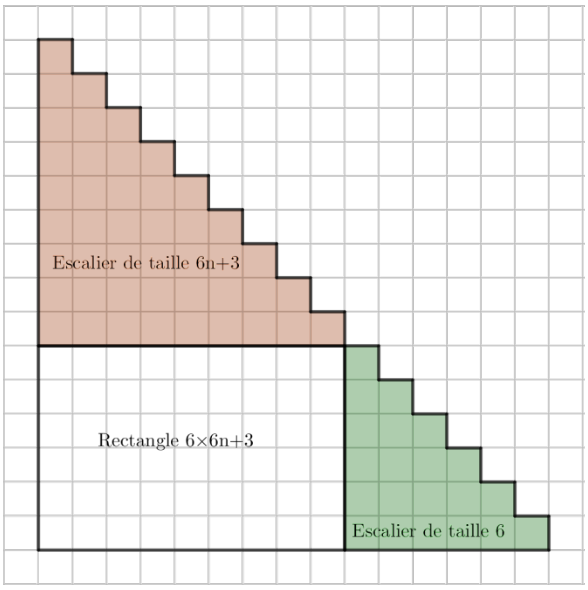
On va démontrer par récurence que pour tout entier naturel n non nul, un escalier de taille $6n+3$ peut être pavé par des L-triominos.

Pour tout entier naturel n non nul, on note $P(n)$ la propriété «Un escalier de taille $6n+3$ peut être pavé par des L-triominos.»

Pour $n = 1$, un escalier de taille 9 peut être pavé par des L-triominos.

La propriété est ainsi vraie pour $n = 1$





Soit n un entier strictement positif.

On va montrer que si la propriété $P(n)$ est vraie, alors la propriété $P(n+1)$ est vraie.

Un escalier de taille $6(n+1)+3$ est composé d'un escalier de taille $6n+3$, d'un escalier de taille 6 et d'un rectangle $6 \times (6n+3)$.

Or, un rectangle $6 \times (6n + 3)$ et un escalier de taille 6 peuvent être pavés par des L-triominos et d'après l'hypothèse de récurrence, un escalier de taille $6n+3$ peut l'être aussi.

La propriété $P(n+1)$ est donc vraie et on a hérédité.

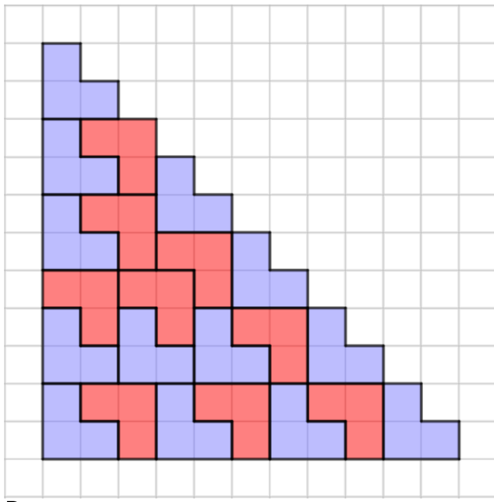
On peut donc conclure que pour tout entier naturel n non nul, un escalier de taille $6n+3$ peut être pavé par des L-triominos.

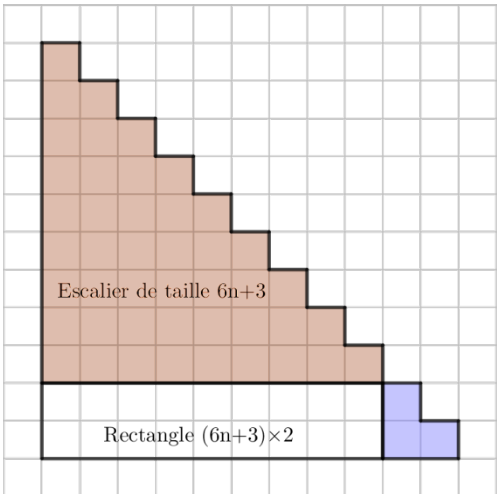
Retour au sommaire

Proposition 4

Pour tout entier naturel n non nul, un escalier de taille $6n+5$ peut être pavé par des L-triominos.

Pour $n = 1$, un escalier de taille 11 peut être pavé par des L-triominos.





Preuve

Soit n un entier strictement positif.

Un escalier de taille $6n + 5$ est composé d'un escalier de taille $6n + 3$, d'un L-triomino et d'un rectangle $(6n + 3) \times 2$.

Or, un rectangle $(6n + 3) \times 2$ est formé de rectangles 3×2 et donc pavable par des L-triominos, et d'après la proposition 3, un escalier de taille $6n + 3$ peut l'être aussi.

Donc, un escalier de taille $6n+5$ peut être pavé par des L-triominos.

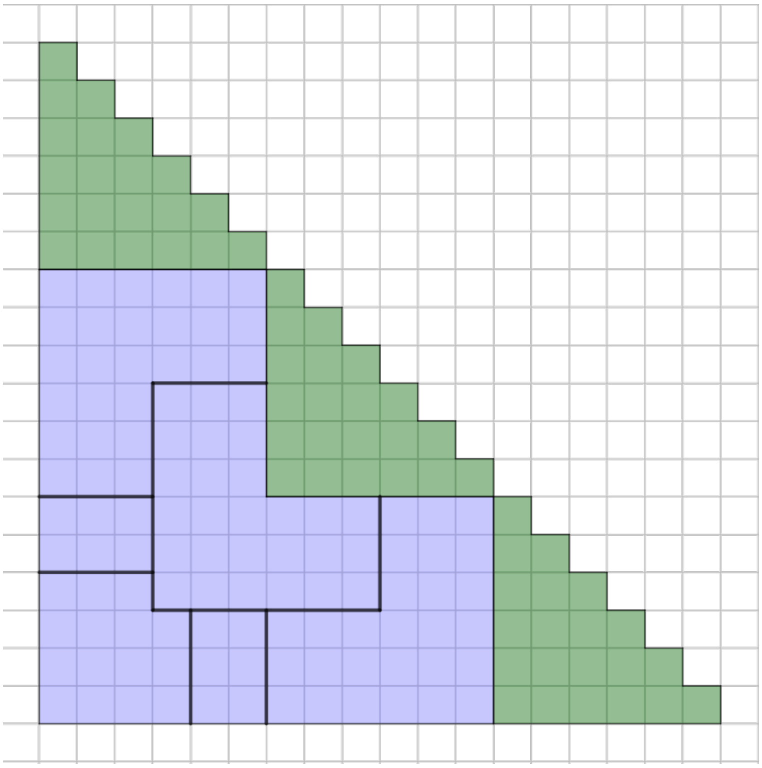
On peut regrouper les quatre propositions précédentes en une seule propriété :

Propriété

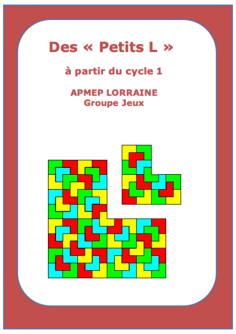
Pour tout entier n strictement positif, un escalier de taille n peut être pavé par des L-triominos si, et seulement si, n est congru à 0, 2, 3 ou 5 modulo 6.

Solution pour un escalier de taille $18 = 2 \times 3^2$

Retour au sommaire



Complément



Le recouvrement des escaliers doubles a été évoqué dans les pages 18, 19 et 20 d'un document bientôt de nouveau accessible sur notre site.

Retour au sommaire

VU SUR LA TOILE

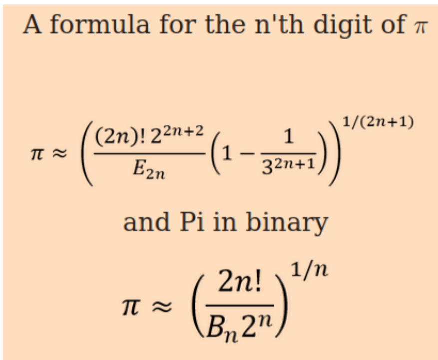
EN NOMBRE

Gilles WAEHREN

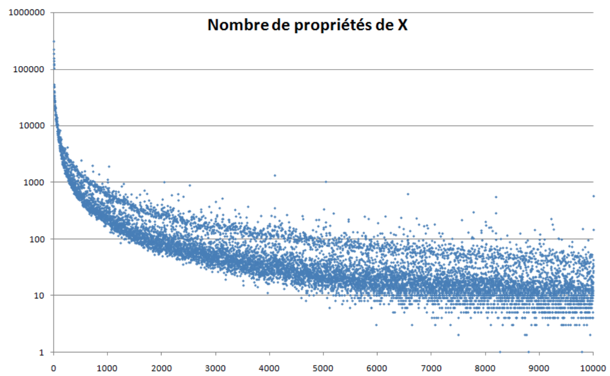
Il a souvent été question de la beauté des mathématiques dans cette rubrique. Que ce soit en lien direct avec les arts ou pour la qualité des représentations géométriques, l'admiration est immédiate. L'esthétique mathématique se cache aussi dans l'élégance de certaines démonstrations. Aujourd'hui, nous allons la chercher dans les nombres et suivre Paul Erdös quand il déclare : « Pourquoi les nombres sont-ils beaux ? […] Si vous ne voyez pas pourquoi, personne ne pourra vous l'expliquer. Je sais que les nombres sont beaux. S'ils ne sont pas beaux, rien ne l'est. »

Apprécié à l'APMEP comme fondateur de l'OULIPO, François Le Lionnais nous a fait partager sa passion pour les nombres remarquables dans un ouvrage qui leur est consacré. Souvent référencé dans cette rubrique, le site de Gérard Villemin comporte son « DicoNombre » qui s'intéresse aux particularités de beaucoup de nombres positifs, et pas seulement des entiers. Ainsi trouve-t'on, pour 10^{-5}, que $8{,}2 \times 10^{-5}$ est la probabilité de gagner au tiercé avec 24 chevaux au départ ou que 10 μ m est la taille d'une cellule végétale.

Autre passionné des nombres, Simon Plouffe présente sur sa « page maison » l'histoire d'une relation riche, notamment au coeur de la recherche de formules pour calculer π. Il est l'un des actifs contributeurs de l'encyclopédie en ligne des suites d'entiers (OEIS), un projet unique dont la particularité est de recenser toutes les suites remarquables d'entiers : la suite des décimales de π est numérotée A000796, celle de Fibonacci est A000045…

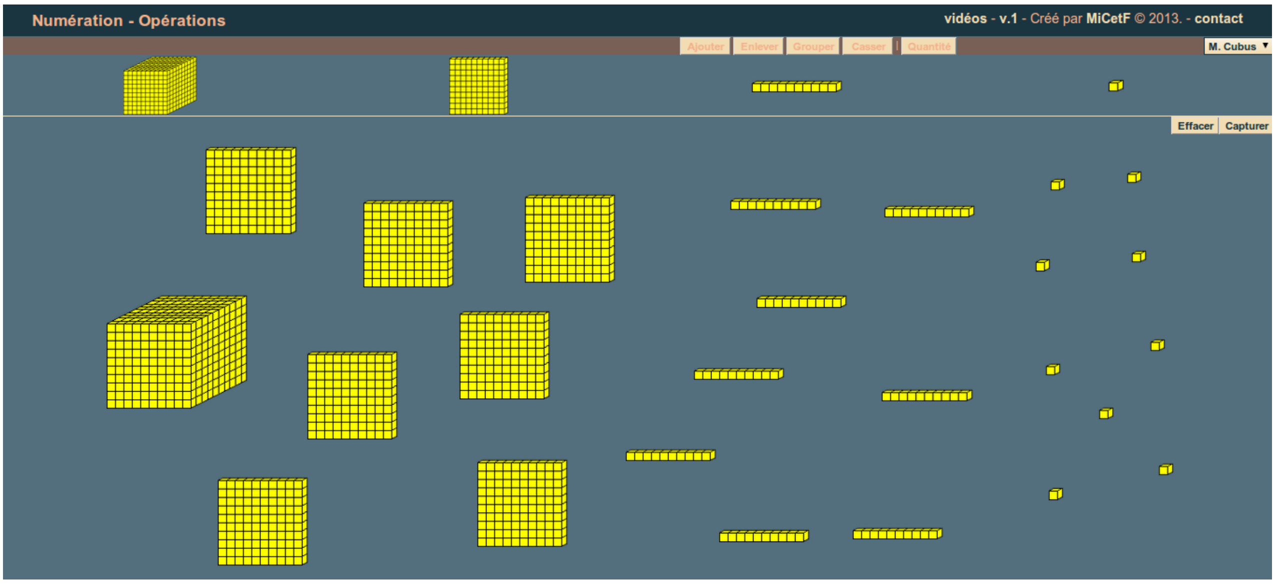


Sur son blog, le Docteur Goulu fait également référence à cette encyclopédie, mais pour mettre en évidence les nombres qui n'ont rien de remarquable, ceux que l'on appelle acratopèges c'est-à-dire qui n'ont pas de propriété particulière. Il cite donc 1548, nombre préféré de son professeur de mathématique, qui l'utilisait sous toutes les formes : 15×48, $1{,}54^8$… Cette étude a conduit notre bon docteur à s'intéresser à la minéralisation des nombres (comme les eaux minérales bienfaitrices) afin d'étudier la répartition des nombres entiers entre ceux qui sont remarquables et ceux qui sont acratopèges : sa conclusion est sans appel.



Retour au sommaire

Le site MiCetF est riche en applications pour le premier degré, tant pour le français que pour les mathématiques, avec des situations constructives comme la manipulation de bouliers ou la représentation graphique de nombres. Cette partie propose notamment de comparer de nombreuses visulisations que ce soit celles de Picbille ou de Montessori. Une approche que l'on retrouve sur le site de la Méthode Heuristique en Mathématiques qui fournit des liens vers d'autres applications en ligne. Enfin, Eduscol, via Primàbord, met à disposition « L'attrape-Nombres », dont la version flash n'est plus utilisable mais qui peut se télécharger sur les appareils mobiles. Cette sous-rubrique permet également d'accéder au jeu La course aux nombres , sans lien avec le concours que vous connaissez sûrement, mais dont on rappelle ici le site.



Retour au sommaire

MATHS ET ARTS

À L'ALHAMBRA (ÉPISODE 2)

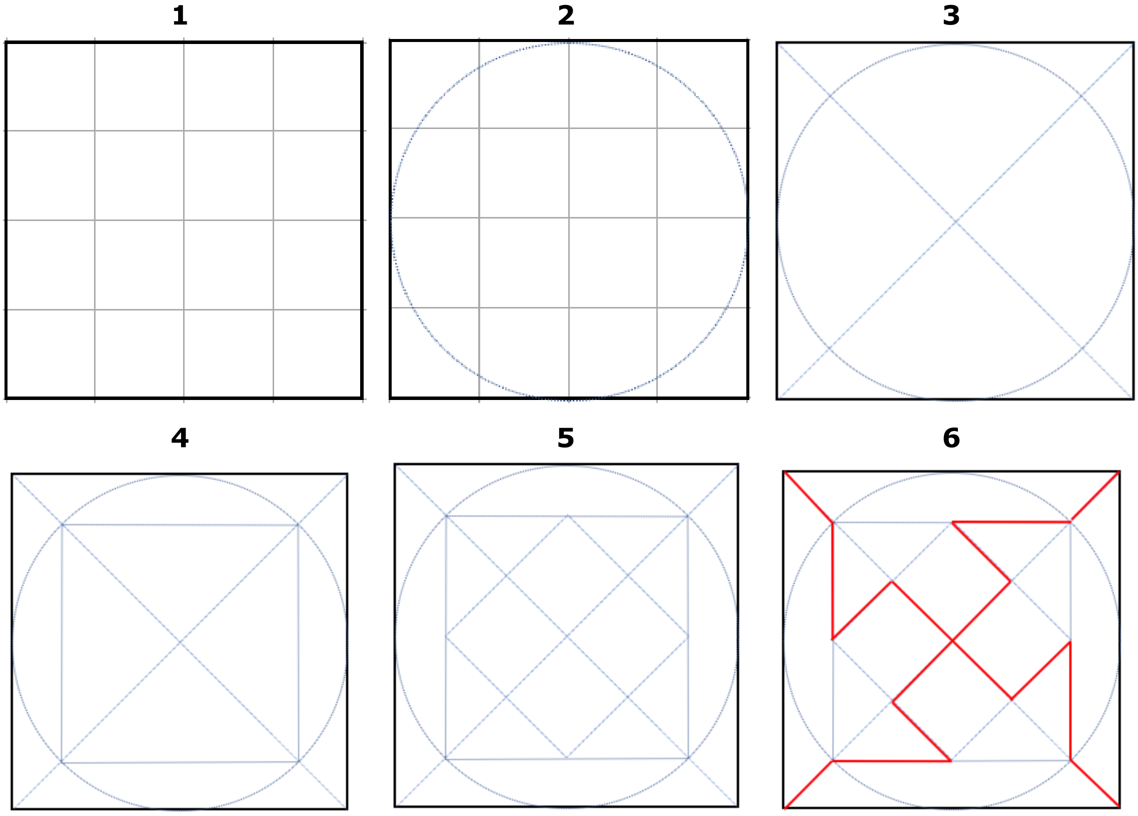
Groupe Maths et Arts - APMEP Lorraine

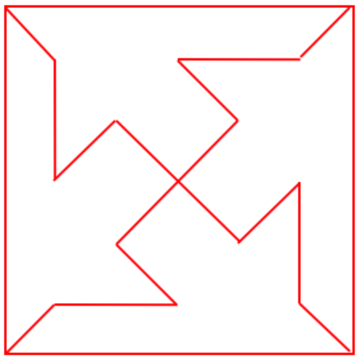
Le Petit Vert n°154 présentait des tracés possibles d'un premier motif de pavage présent sur une carte de vœux envoyée par une de nos adhérentes. Celle-ci nous a par la suite envoyé la photo d'un second motif que nous avons également eu envie d'analyser.

La photo fournie

Retour au sommaire

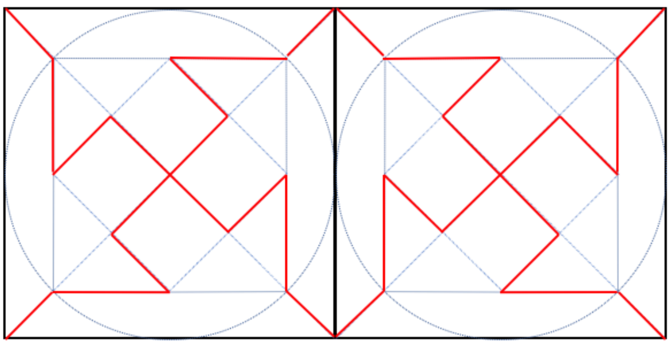
Histoire sans paroles





Le carré est découpé en quatre polygones dont chacun d'eux pourra être considéré comme cellule génératrice du pavage.

Des rotations du polygone choisi fournissent la réalisation du carré.



Une symétrie orthogonale permet d'obtenir ce motif. Reproduit ensuite à l'aide de symétries, il permet la réalisation du pavage à l'aide de translations.

Retour au sommaire

MATHS ET ARTS

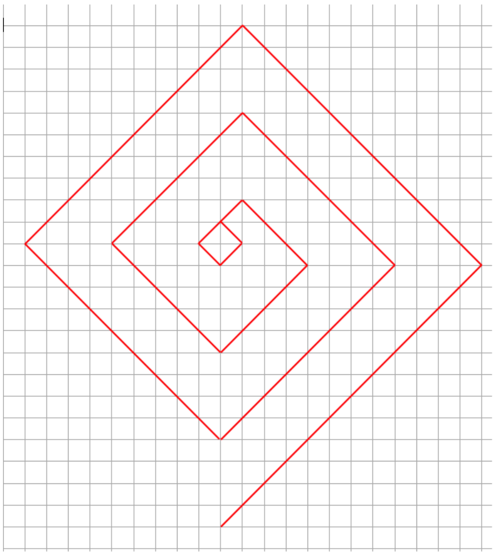
ROGER HARDY ET LA FABULOSERIE

Groupe Maths et Arts - APMEP Lorraine

Cette œuvre de Roger Hardy a été présentée pendant l'été 2023 à la Halle Saint-Pierre à Paris, faisant partie d'une exposition consacrée à des artistes non conventionnels, non officiels, non reconnus, donc un peu marginaux.

L'artiste est présenté sur le site de la Fabuloserie : cet idéaliste généreux, amateur de mathématiques et touche à tout mérite d'être connu de nos lecteurs !

Retour au sommaire



Prendre appui sur un quadrillage permet de comprendre comment cette partie de l'œuvre a été dessinée.

Retrouverez-vous comment les nombres indiqués ont été obtenus ?

En utilisant la règle et le compas ou GeoGebra réussirez-vous à reproduire la partie en haut à gauche de l'œuvre ?

La spirale à quatre centres utilisée par Roger Hardy se retrouve dans le document « Les Spirales » (Galion 1992) proposé en téléchargement sur le site de l'APMEP : voici un beau point de départ pour de riches activités en classe. Si vous en faites une utilisation avec vos élèves, n'hésitez à nous envoyer leurs productions et vos commentaires.

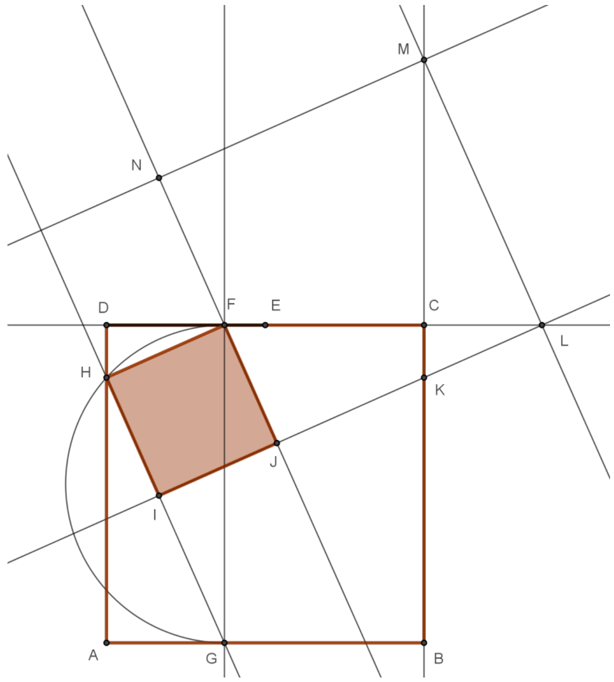
Retour au sommaire

MATHS ET DÉCOUPAGES

DÉCOUPER UN CARRÉ EN DEUX CARRÉS NON SUPERPOSABLES

Groupe Jeux - APMEP Lorraine

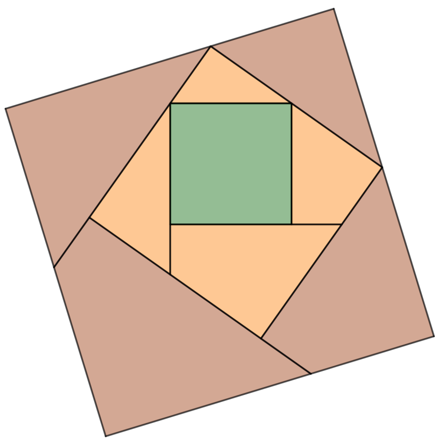
Construire la figure ci-contre sur une feuille blanche ou en utilisant un logiciel de géométrie dynamique.



1) Construire un carré ABCD.
2) Placer E milieu de [CD].
3) Placer un point F sur le segment [DE] et distinct des points D et E.
4) Tracer la perpendiculaire à (CD) en F. Elle coupe [AB] en G.
5) Tracer le demi-cercle de diamètre [FG]. Le point H est le point d'intersection avec [AD] le plus proche de D.
6) Construire le carré FHIJ.
7) Tracer la droite (IJ). Elle coupe [BC] en K.

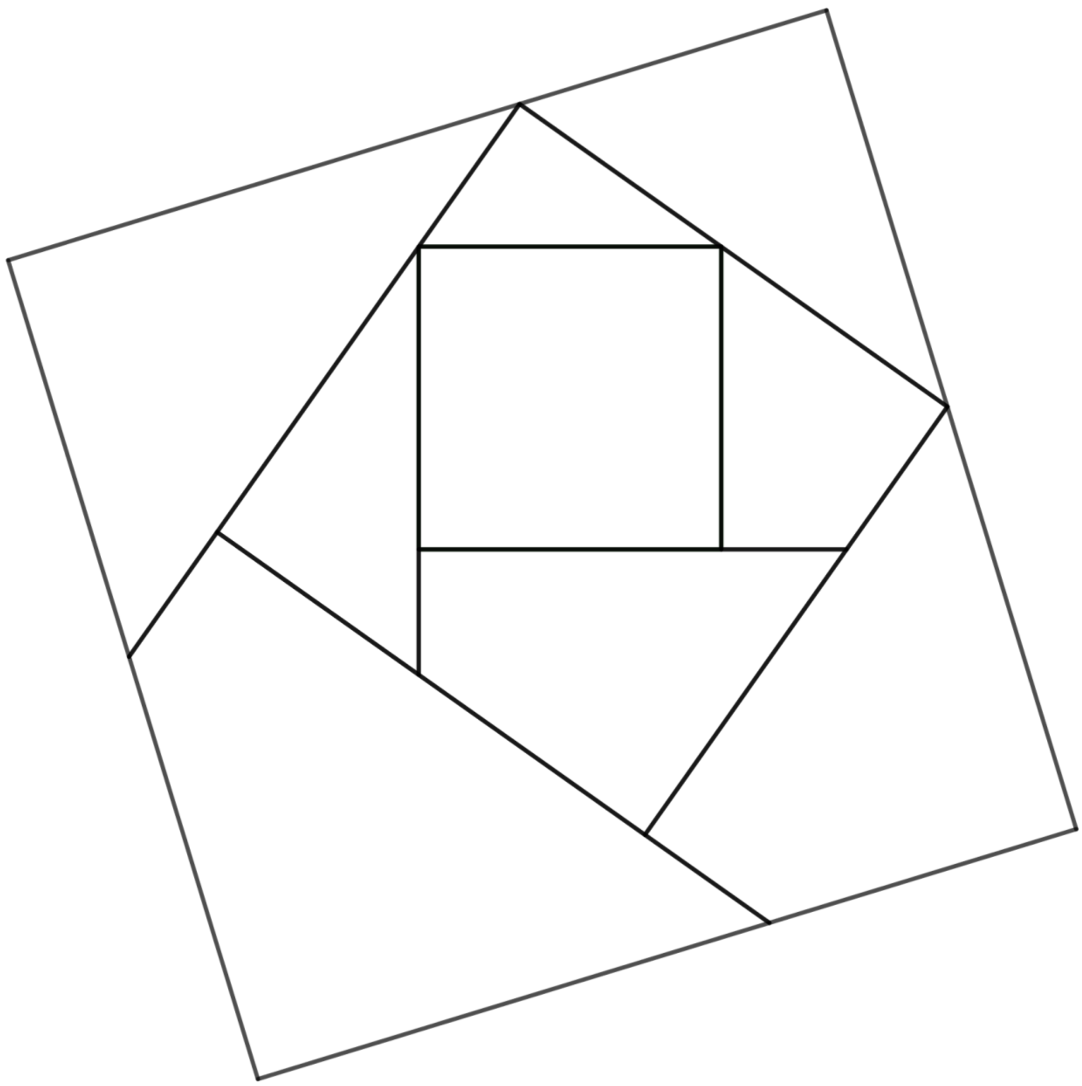
Cette construction permet de découper un carré en cinq pièces : un carré et quatre pièces qui, une fois réassemblées, formeront un autre carré.

Le découpage ci-dessous permet de réaliser trois carrés d'aires 1 ; 2 et 5 ou deux carrés d'aires 3 et 5 ou un seul carré d'aire 8.

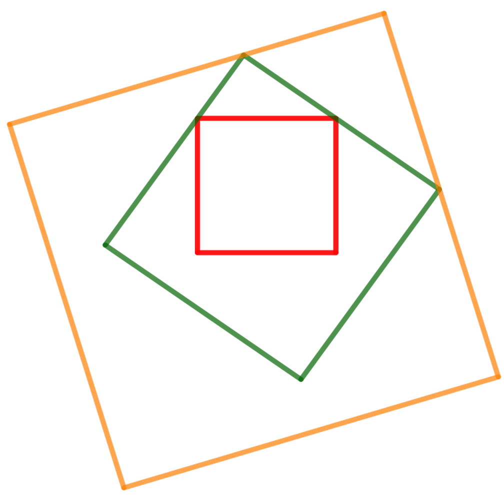


Retour au sommaire

Voici un dessin à imprimer, coller sur du carton et découper.



Un clin d'œil vers des préoccupations du groupe maths Arts

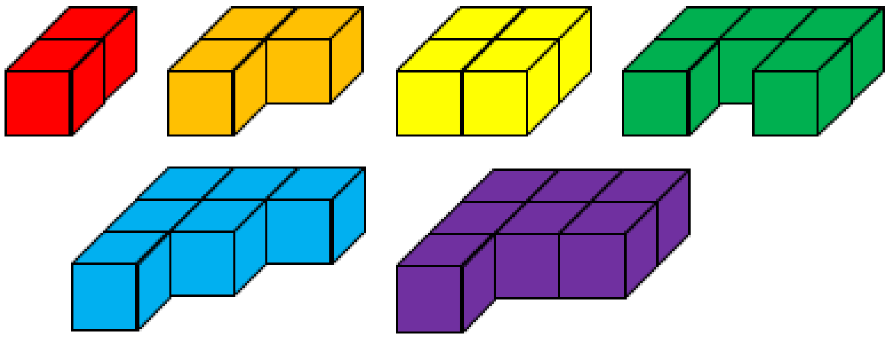


Retour au sommaire

MATHS ET JEUX

AVEC LES PIÈCES DU CUBE « DIABOLIQUE »

Groupe Jeux - APMEP Lorraine



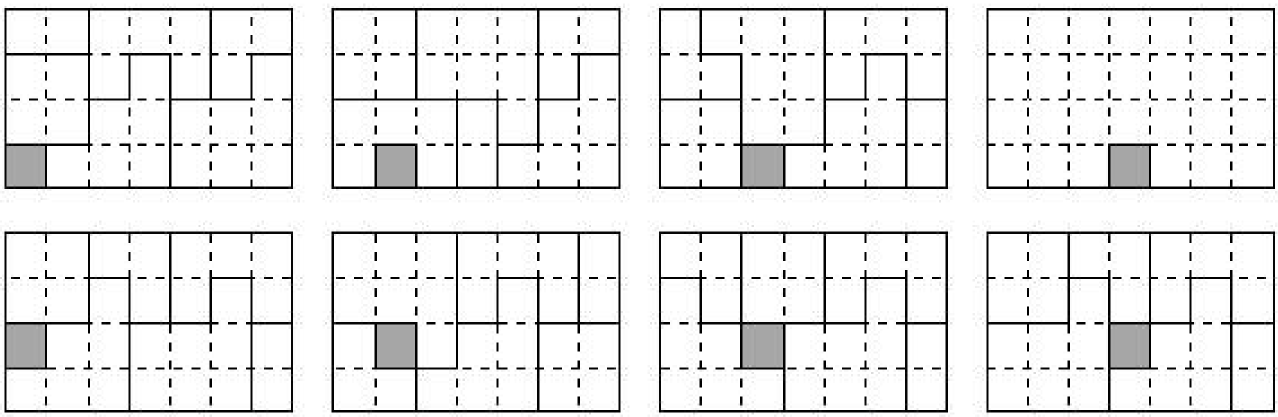
Un grand merci aux joueuses et joueurs non lorrain(e)s qui ont participé avec nous aux recherches à propos de ce qui est sans doute le plus vieux polycube encontré dans un livre. Nous avons tous et toutes utilisé les mêmes couleurs pour les six pièces, celles-ci se retrouvent ici.

Les sept pièces se trouvent à la page 108 du livre « *Puzzles Old and New*» paru en 1893. L'auteur est « Professeur Hoffmann », de son vrai nom Angelo John Lewis.
Une solution est indiquée page 142. Il en existe 12 autres : la recherche a été efficace, nous les avons trouvées.

2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27 = $\mathbf{3^3}$

Le Petit Vert n°128 évoquait des collections semblables de six polycubes. À cette occasion, Claude Pagano nous avait confié un codage possible des pièces.

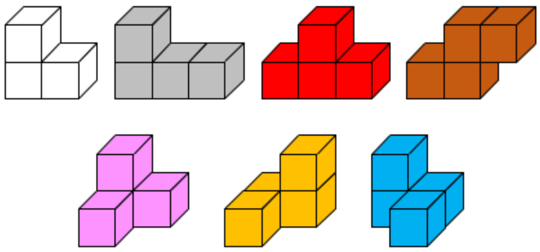
Les six pièces permettent-elles le recouvrement d'un rectangle 4x7 « troué ». Sept positions sont possibles, nous avons été convaincu(e)s de l'impossibilité de la huitième en utilisant un *Solver* mis à notre disposition par le site allemand Pentoma.



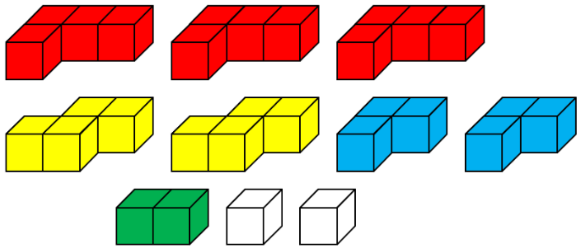
Retour au sommaire

Des solides réalisés avec les six pièces

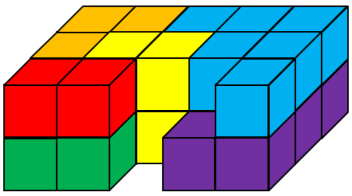
Dans un premier temps, l'envie a été de réaliser des assemblages qui avaient été construits avec des polycubes que les joueurs et joueuses de notre association connaissent bien.



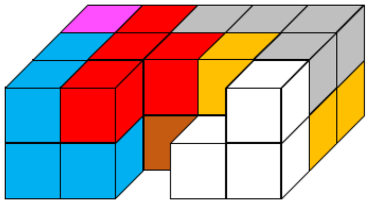
Les pièces formant le cube Soma



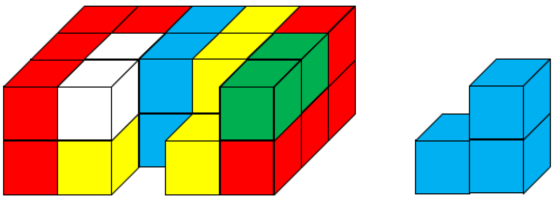
Les pièces formant la pyramide aztèque



Avec les pièces du cube « diabolique »

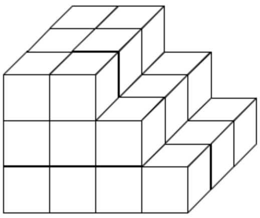


Avec les pièces du cube Soma



Avec les pièces de la pyramide aztèque

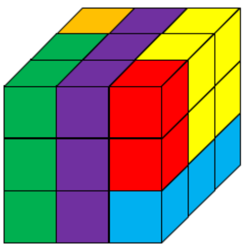
Les pièces de la pyramide aztèque sont formées de 30 cubes unitaires, une pièce est mise de côté.

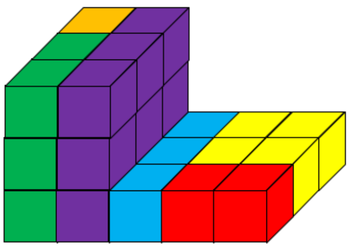


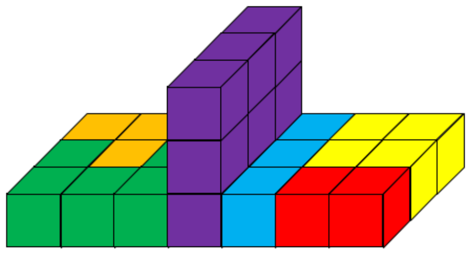
$1 \times 3 \times 4 + 1 \times 3 \times 3 + 1 \times 3 \times 2 = 27$

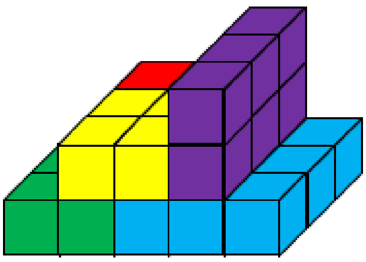
Réussirez-vous à construire cet escalier ?

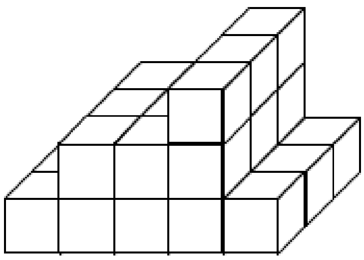
Le cube peut se déplier pour former des pavés accolés.











Ce prisme peut être considéré comme un empilement de pavés.

Voici des expressions numériques correspondant à plusieurs empilements possibles.

Retour au sommaire

$1 \times 3 \times 5 + 1 \times 3 \times 3 + 1 \times 1 \times 3$

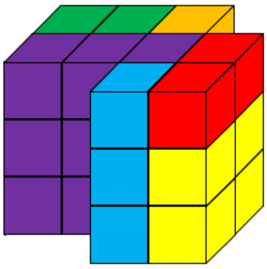
$1 \times 1 \times 3 + 1 \times 3 \times 3 + 2 \times 2 \times 3 + 1 \times 1 \times 3$

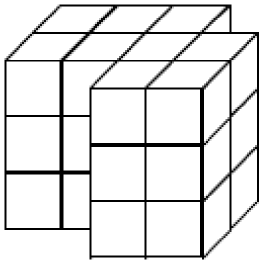
Ce prisme peut aussi être considéré comme un pavé écorné de plusieurs pavés.

Voici des expressions numériques correspondant à plusieurs « découpages » possibles.

$3 \times 3 \times 5 - 1 \times 2 \times 3 - 1 \times 2 \times 3 - 1 \times 1 \times 3$

$3 \times 3 \times 5 - 1 \times 2 \times 3 - 1 \times 1 \times 3 - 1 \times 3 \times 3$



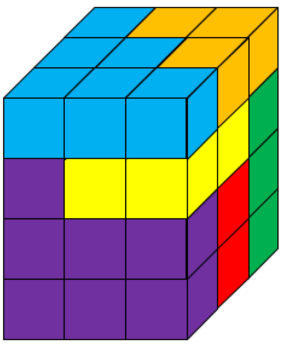


Quelles expressions numériques peuvent être associées à ce prisme ?

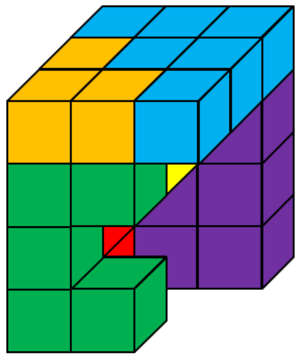
Des constructions « diaboliques »

Rappel : $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27 = 3^3$. Les six pièces sont utilisées.

Où s'est caché le diable ?



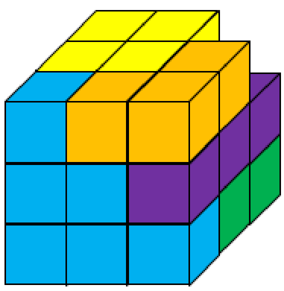
Le dessin du solide



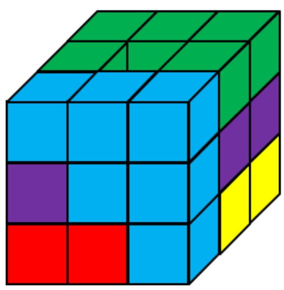
Allons voir derrière le solide.

Pour ces quatre solides, où s'est caché le diable ?

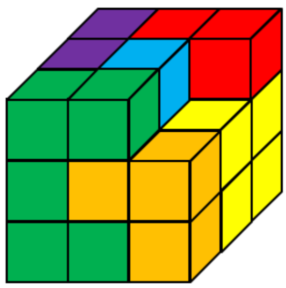
1



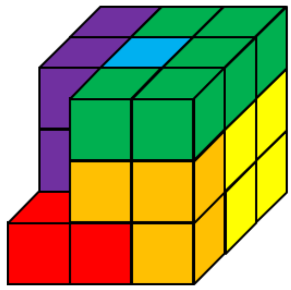
2



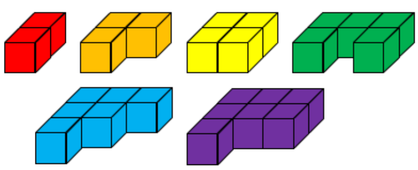
3



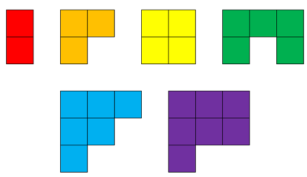
4



Des pavages du plan



Les six pièces

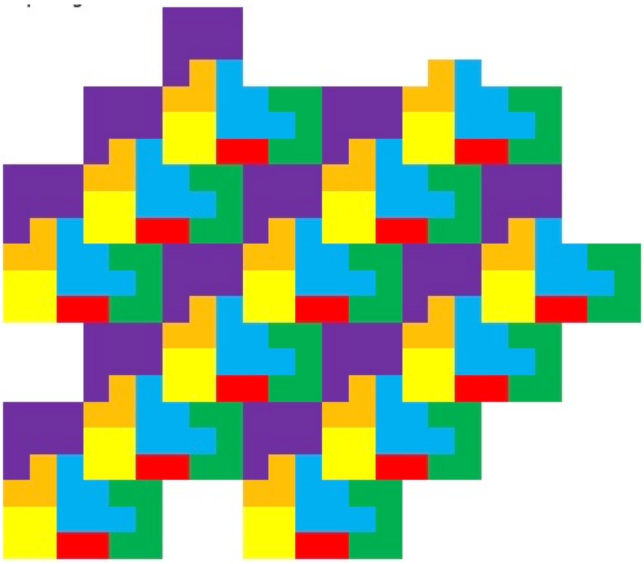


Les bases des six pièces

Les six pièces sont des prismes. Leurs bases peuvent recouvrir des tuiles de pavage.

Retour au sommaire

La tuile de pavage

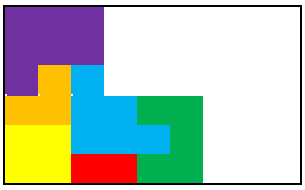


Le pavage obtenu en utilisant des translations

Le Petit Vert sera preneur de vos créations.

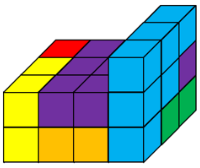
Pavons l'espace

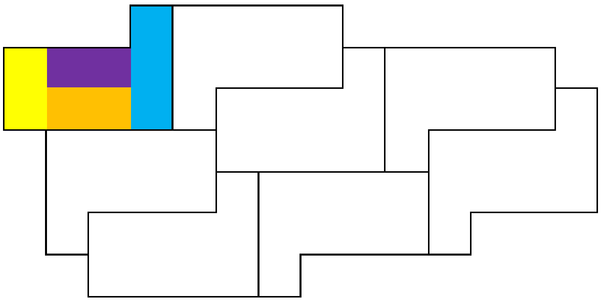
Une première méthode



Les bases de certains assemblages plats forment des tuiles de pavage du plan. Ces assemblages plats forment donc des tuiles de pavage de l'espace.

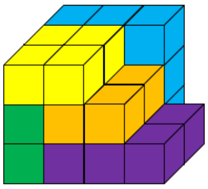
Une deuxième méthode



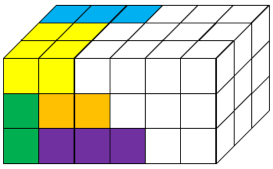


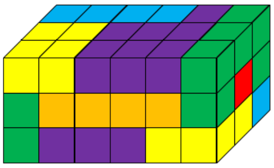
Certains assemblages des six pièces sont des prismes dont les bases sont des tuiles de pavage du plan. Ces assemblages forment donc des tuiles de pavage de l'espace.

Une troisième méthode



Un pavé est obtenu en assemblant deux exemplaires de cet assemblage





D'autres exemples seront proposés sur notre site, le Petit Vert sera preneur de vos créations.

L'ensemble des documents écrits suite à nos échanges sera bientôt accessible sur notre site. Ils seront complétés si d'autres envies nous (vous…) viennent pour d'autres utilisations

Retour au sommaire

COMMENT RENFORCER LES STÉRÉOTYPES

Les filles peuvent faire de bonnes affaires à Toulouse, comme en témoigne cette evanture photographiée en mai dans une rue de la capitale occitane.

Le dressing des « filles » n'y va pas par quatre chemins dans son accroche, renforçant une image de la femme que nous nous efforçons de combattre dans notre association et quotidiennement dans nos classes.

Il n'y a pas d'espace après la virgule du 10 : s'agit-il de 10,20 euros ?

Y-a-t-il eu une hésitation chez les auteurs ou autrices du texte entre « et » et « ou » pour annoncer les prix ?

Dans leur retenue, ils ou elles n'ont pas osé accorder l'adjectif au féminin !

Retour au sommaire

MATHS ET PHILO

BACON
COMBATTRE LES IDOLES

Didier Lambois

Parler de Bacon peut mettre l'eau à la bouche de quelques-uns parmi nous, et pourtant nous ne parlerons pas cuisine. Parler de Bacon, c'est se donner l'occasion de réfléchir à nos connaissances, de réfléchir à l'histoire de la science, bref c'est faire de l'épistémologie. Mais attention : il y a Bacon et Bacon.

Roger Bacon

La première tranche se trouve au Moyen-âge, avec Roger Bacon (1220-1292), le docteur admirable ». Ce surnom n'a rien d'exagéré, car l'érudition de ce franciscain était effectivement hors du commun. Il la devait en particulier à Robert Grossetête[1] dont il se disait le disciple, mais aussi à son intérêt pour la science arabe.

Maître ès arts[2] en 1236, Roger Bacon vit et enseigne alternativement à l'université de Paris (de 1237 à 1247, puis de 1256 à 1280) et d'Oxford (de 1247 à 1256). Ses premiers travaux portent principalement sur les œuvres d'Aristote. Dans l'esprit du temps, c'est-à-dire assez critique à l'égard du maître[3], cet enseignement ne suscite guère de controverse. Mais à partir de 1260 ses écrits vont devenir plus polémiques et vont être accusés de contenir des « nouveautés suspectes ».

À la demande du pape Clément IV, qui était par ailleurs son ami et protecteur, Roger Bacon avait entrepris de rédiger, en 1267, un grand ouvrage faisant un examen de toutes les connaissances : *l'Opus Majus*. De nature encyclopédique, cet ouvrage couvre l'ensemble des domaines du savoir, la grammaire et la linguistique par exemple, la philosophie et la théologie bien sûr, et surtout les sciences, l'astronomie, l'optique, les mathématiques, la physique. Mais cet ouvrage n'est pas tant un exposé du savoir acquis qu'un projet de réforme, le projet d'une science à construire.

L'essentiel des « nouveautés suspectes » n'est pas dans certains projets de réforme concernant l'enseignement, comme l'idée d'enseigner la langue arabe et les auteurs arabes dans les universités (bien que l'idée dérange fortement le bon pape Clément), elles résident plutôt dans

[1] Robert Grossetête (ou Grosseteste), né en 1168 et mort en 1253, évêque de Lincoln, était chancelier de l'université d'Oxford, où étudia Roger Bacon, mais ces deux savants ne se seraient pas rencontrés. Grand commentateur d'Aristote, il était un fervent défenseur des mathématiques qu'il présentait comme l'outil nécessaire de toute science.

[2] Le maître ès arts était une personne autorisée à enseigner les humanités et la philosophie.

[3] Aristote a été interdit plusieurs fois, en 1215, en 1228, et il faudra attendre la *Somme Théologique* de Thomas d'Aquin (ouvrage rédigé entre 1266 et 1273) pour qu'Aristote se réconcilie avec la chrétienté et devienne le pilier de la logique.

Retour au sommaire

la place que Roger Bacon veut accorder au raisonnement, aux mathématiques et à l'expérience. Tout en restant « scolastique », persuadé de la supériorité de la théologie, c'est en effet une nouvelle science que veut Roger Bacon. En développant les idées de son maître Grossetête, il invente et formule pour la première fois le concept de « **science expérimentale** ». Mais ses innovations dans ce domaine, et il le dit, sont loin de valoir celles des savants qu'il donne en exemple.

À la différence d'autres penseurs de son époque, Roger Bacon étudie pour trouver des maîtres de méthode et non des maîtres de doctrine. Il les trouve dans la science arabe, avec Alhazen (965-1040), grand mathématicien, qui est le premier à utiliser vraiment une méthode d'analyse scientifique. Ses travaux en optique restent encore aujourd'hui une référence. Roger Bacon admire aussi beaucoup Pierre de Maricourt, un de ses contemporains, qui dans ses travaux sur le magnétisme, montre bien la nécessité de compléter la méthode mathématique par la méthode expérimentale.

Après la mort de Clément IV, en novembre 1268, le « docteur admirable » cessa d'être admiré ; Roger Bacon se trouva livré à lui-même et livré aussi aux foudres des conservateurs scolastiques. Ses audaces, ses prophéties fantasques[4] lui valurent d'être regardé comme un sorcier qui ne méritait que la prison (ce qu'il connut plusieurs années). Trop en avance pour son époque, Roger Bacon a été ensuite regardé par les historiens de la philosophie comme trop ancré dans les croyances de son temps. Il est vrai que l'astrologie, l'alchimie et la théologie gardaient une place importante dans ses travaux. Trop original pour les uns, trop peu pour les autres, le père de la science expérimentale tomba assez vite dans l'oubli.

Francis Bacon

Un deuxième héraut de la science moderne se nomme aussi Bacon, Francis ou François (1561-1626). Par sa naissance (il est fils du garde des Sceaux) il est amené à faire carrière au service de l'État et de ce point de vue sa réussite est remarquable. Attorney général, garde des Sceaux, grand chancelier… le Baron de Verulam, vicomte de Saint-Alban (ce sont ses titres) dispose d'une fortune sans équivalent, mais désireux d'en avoir plus encore il finit par être accusé de concussion. Condamné en 1621, emprisonné quelque temps à la tour de Londres, il est écarté de la vie publique et peut alors consacrer pleinement les cinq dernières années de sa vie aux travaux philosophiques qu'il menait jusqu'alors en parallèle.

Ces travaux portent principalement sur « la restauration des sciences » et rejoignent, par de nombreux points, ceux de Roger, mais à la différence de ce dernier, il accorde peu d'intérêt aux mathématiques. Son souci premier, comme dans la vie politique, c'est l'efficacité, la réussite. Pour lui, ce n'est pas le verbiage de la logique qui peut nous aider à connaître la nature ; nous devons avant tout observer les faits. Nous devons ensuite répertorier ces observations, les classer, puis mettre en œuvre des expériences qui nous permettront d'infirmer ou de confirmer

[4] Bien avant Léonard de Vinci, Roger Bacon affirmait que la science permettra de construire des voitures qui se déplaceraient sans la force animale, des bateaux qui avanceraient sans rames, des machines volantes etc.

Retour au sommaire

des hypothèses avancées pour expliquer les phénomènes[5].

La fourmi, l'araignée et l'abeille

Le *Novum Organum* (1620), ouvrage dans lequel Bacon expose cette méthode expérimentale, se veut d'être une *nouvelle logique*, logique aux antipodes de la logique déductive qui partait des principes pour aller aux faits. Si les faits ne parlent pas d'eux-mêmes (la fourmi), la logique ne peut, à elle seule, nous conduire au réel (l'araignée). La nouvelle logique, inductive, devra avant tout s'appuyer sur les faits pour construire, par la raison, l'édifice du savoir (l'abeille).

Les philosophes qui se sont mêlés de traiter des sciences se partageaient en deux classes, à savoir : les empiriques et les dogmatiques. L'empirique, semblable à la fourmi, se contente d'amasser et de consommer ensuite ses provisions. Le dogmatique, tel que l'araignée, ourdit des toiles dont la matière est extraite de sa propre substance. L'abeille garde le milieu ; elle tire la matière première des fleurs des champs et des jardins ; puis, par un art qui lui est propre, elle la travaille et la digère. La vraie philosophie fait quelque chose de semblable ; elle ne se repose pas uniquement ni même principalement sur les forces naturelles de l'esprit humain, et cette matière qu'elle tire de l'histoire naturelle, elle ne la jette pas dans la mémoire telle qu'elle l'a puisée dans ces deux sources, mais après l'avoir aussi travaillée et digérée, elle la met en magasin. Ainsi notre plus grande ressource et celle dont nous devons tout espérer, c'est l'étroite alliance de ces deux facultés : l'expérimentale et la rationnelle.... (Novum Organum, 1620).

En s'opposant à la seule autorité d'Aristote, Roger Bacon, *le docteur admirable*, précurseur de la science expérimentale, et Francis Bacon, peu admirable par sa vie, père de l'empirisme rationnel, ont contribué tous deux à l'émancipation de la science, c'est indéniable. Science, théologie et philosophie, resteront, après eux, des domaines bien distincts.

Mais la parenté des deux Bacon (qui n'ont aucun lien familial) ne s'arrête pas là. Ce qui fait leur force et leur originalité c'est qu'ils ont une même volonté de chercher et de combattre ce qui, en nous, fait obstacle à la connaissance. Qu'il s'agisse de *l'Opus Majus* de Roger ou du *Novum Organum* de Francis, les deux ouvrages commencent par une longue réflexion critique sur les conditions du savoir ; avant de construire l'édifice de la science, il faut réformer l'esprit humain et détruire ce qui détourne de la connaissance vraie. C'est cette attitude critique, cette « psychanalyse de la connaissance » avant l'heure, qui est étonnante et innovante. Elle éclairera l'épistémologie jusqu'au XXème siècle (Bachelard, Popper).

Les idoles

L'autorité, la coutume, le préjugé, la présomption sont aux yeux de Roger Bacon ce qui nuit à la connaissance. Nous prétendons savoir (présomption) et nous masquons notre ignorance *« derrière le gros bon sens des masses sans expérience »* dit Roger Bacon. Le poids des habitudes et la paresse intellectuelle nous paralysent, l'autorité des « maîtres » réconforte mais conduit souvent à l'erreur[6].

Francis Bacon qualifie d'idoles tous ces facteurs d'illusions qui viennent aussi bien de notre nature que de notre culture. Il y a tout d'abord les dispositions vicieuses de notre esprit qui tend toujours

[5]C'est Bacon qui formule pour la première fois l'idée *d'instantia crucis*, reprise ensuite par Hooke et Newton sous la forme *d'experimentum crucis*, l'expérience cruciale. La croix qui est placée à la croisée des chemins doit nous aider à trouver la bonne voie, il doit en être de même pour l'expérience.

[6]Roger Bacon pensait bien sûr à Aristote, sans remettre vraiment en cause l'autorité des textes sacrés.

Retour au sommaire

à la facilité, qui suit sa pente, qui imagine, qui généralise hâtivement (*idola tribus*, idoles de la tribu). Nous sommes comme les prisonniers de la caverne de Platon, disposés à croire, façonnés par les habitudes (*idola specus*, idoles de la caverne). Persuadés que nous connaissons les choses parce que nous les nommons, parce que le langage les a déjà classées, nous communiquons et jouons avec des mots qui se jouent de nous *idola fori*, idoles de la place publique). Viennent enfin les illusions provoquées dans la transmission du savoir (*idola theatri*, idoles du théâtre). La mise en scène du savoir par les maîtres nous rend plus facilement amoureux du maître que de la connaissance à avoir. Ce prestige du maître, aveuglant, n'est pas seulement celui des grands penseurs, ce peut être aussi celui du « professeur fripon » qui ne s'affirme que dans le « paraître savoir ». Et nous en sommes peut-être.

À en croire Bacon et Bacon, une réforme de l'entendement est donc nécessaire, mais elle ne suffit pas. Il faut aussi réformer l'esprit de ceux qui forment les esprits. Et dans une société comme la nôtre, où ceux qui (désin)forment les esprits n'ont eux-mêmes pas d'esprit, je veux parler des réseaux sociaux, nous pouvons être inquiets.

Vous en reprendrez encore un peu

J'avais parlé de deux tranches de Bacon, mais j'entends déjà mon charcutier me dire : " il y en a une troisième, je vous la mets quand même ? " Et il a raison. Il serait en effet dommage d'ignorer Francis Bacon (1909 - 1992), grand artiste peintre britannique dont l'œuvre torturée et violente permet de comprendre que le beau se cache parfois ailleurs que dans l'aimable et le gentil.

Retour au sommaire

MATHS ET MÉDIAS

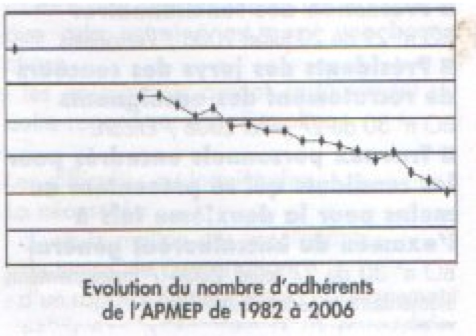
MATH & MEDIA

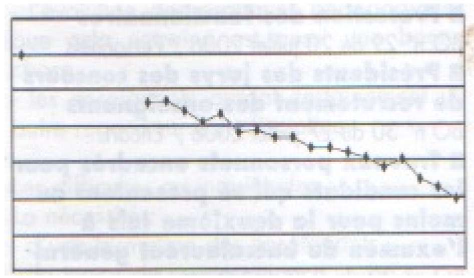
Cette rubrique est alimentée par les envois de nos lecteurs. Qu'ils continuent à le faire en nous envoyant à notre adresse des scans de qualité, en précisant leurs sources.
Des commentaires et des activités possibles en classe sont toujours les bienvenus.

L'APMEP est-elle en danger ?

Lorsqu'on range, des choses réapparaissent. L'éditorial du BGV 130 de septembre 2006 donnait l'envie d'une relecture. Pourquoi ce numéro avait-il été gardé ? Mystère…

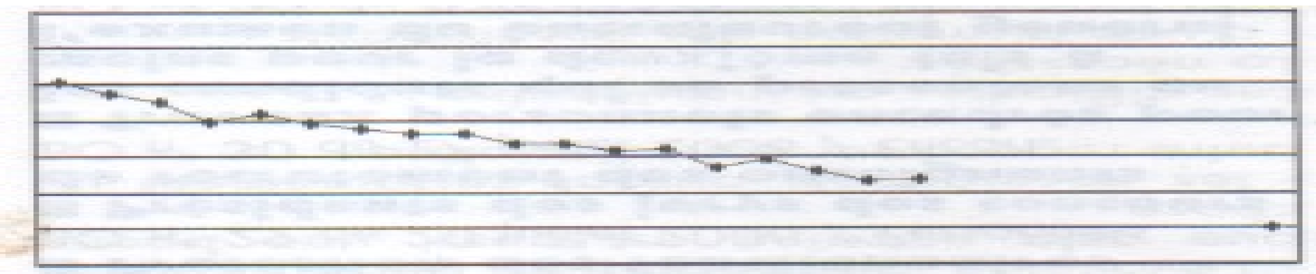
Un graphique illustrait le questionnement.





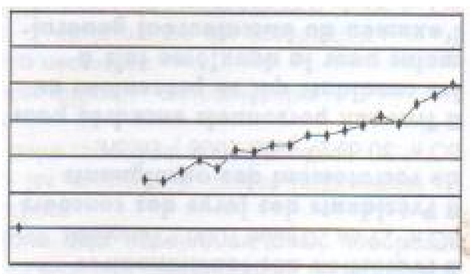
Ci-dessus le graphique et sa légende. Et en retirant la légende.

Et amusons-nous :



La baisse semble moins inquiétante….

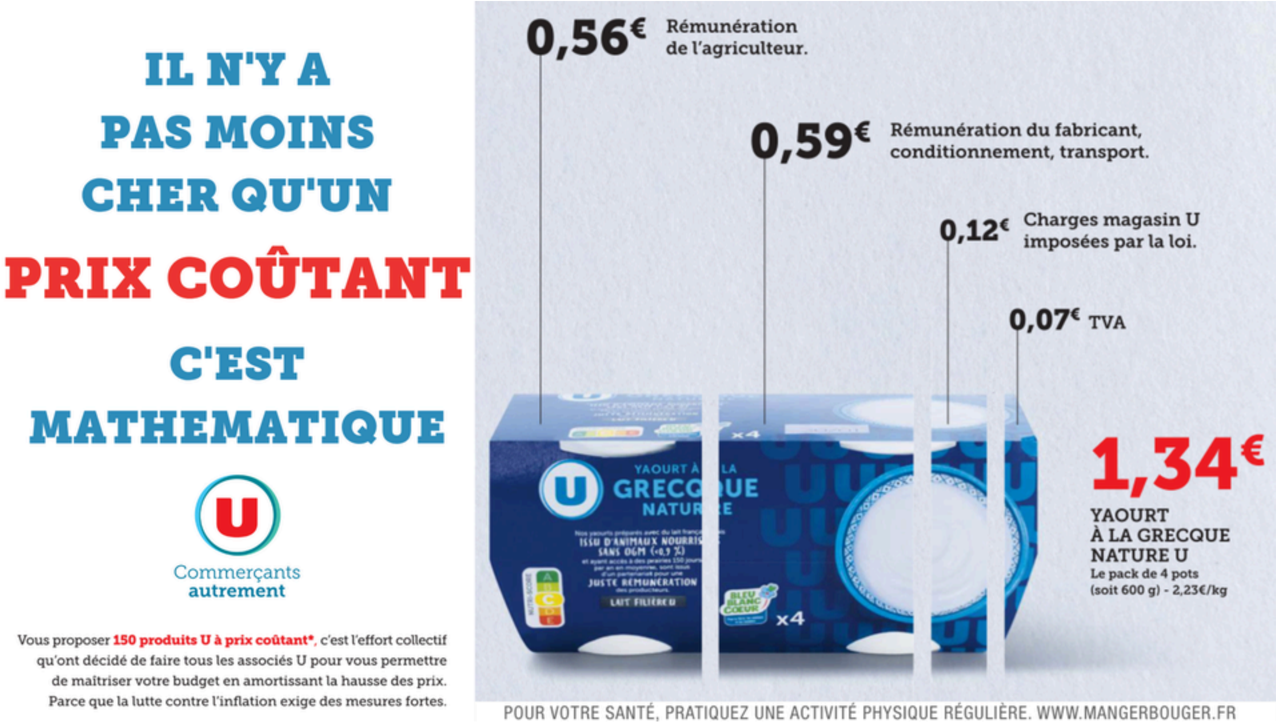
En regardons le BGV dans un miroir, tout va mieux :



Retour au sommaire

MATHS ET MÉDIAS

UN PRIX COÛTANT MATHÉMATIQUE



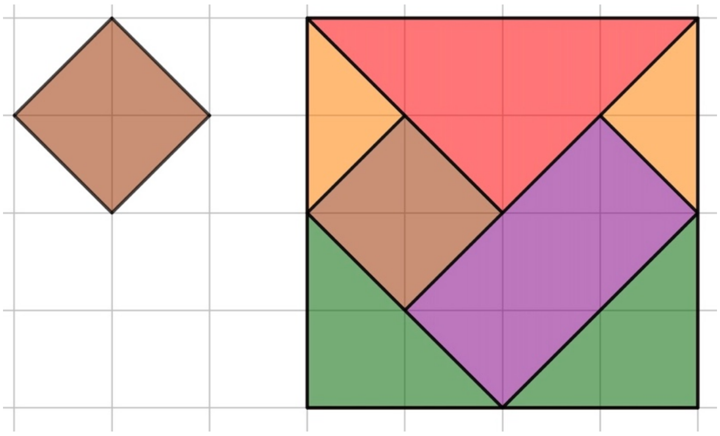
Il n’est pas impossible qu’il y ait des produits semblables et moins chers dans le magasin.

Quant à ce qu’on pourrait trouver de semblable moins cher dans d’autres magasins…

Lire « C’est mathématique » est intéressant, mais il est difficile de connaître la signification de cette expression pour le créateur de la publicitè : est-ce l’usage de chiffres ? est-ce l’écriture d’une partition de 1,34 avec des décimaux ? est-ce le calcul du montant de la TVA à l’aide d’une division par un coefficient multiplicatif ?

Retour au sommaire

DÉFI 155-1 : UN CARRÉ ACCUEILLANT



Le « Carré de Metz » est accueillant. Un deuxième carré brun a frappé à sa porte. Il a été reçu avec joie.

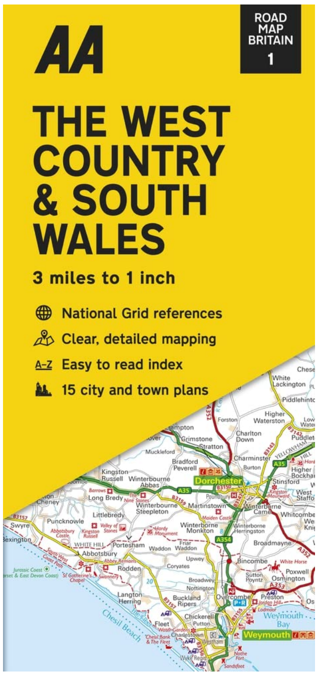
« Viens avec nous, avec nos huit pièces, nous allons pouvoir réaliser un nouveau carré ».

Dans ce nouveau carré, quelles places pourra occuper le deuxième carré brun ?

DÉFI 155–2
FIND THE SCALE

Une de nos adhérentes a suivi, à la fin de ce printemps 2023, les routes du Pays de Galles, en pédalant. Riche en tours et détours, ce périple suppose de se munir d'une carte de la région. Mais voilà, l'acquisition d'un tel document ne va pas sans poser quelques questions sur son échelle. La carte ci-dessous est-elle au 25 millième ? au 50 millième ? **Peut-être est-elle d'un autre calibre, mais lequel ?**

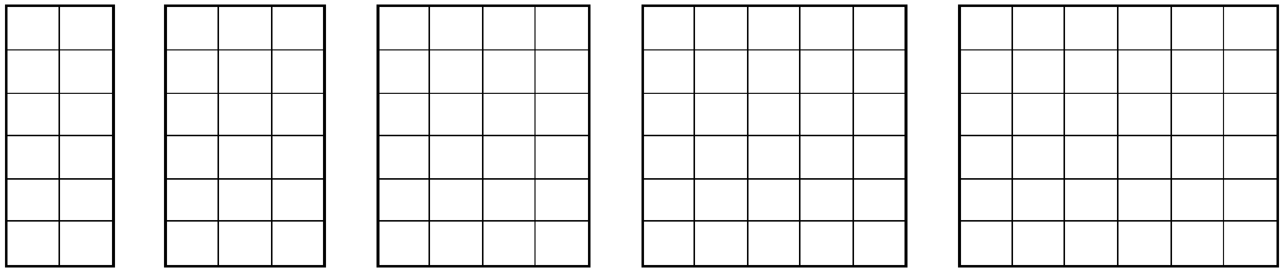
On rappelle qu'un *mile* représente 1,609 km (moyen mnémotechnique : « un ciseau neuf ») et qu'un *inch* représente 2,54 cm (pas de moyen mnémotechnique… si vous en trouvez un, nous sommes preneurs).

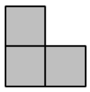


Retour au sommaire

SOLUTION DÉFI 154 – 1

Énoncé





Des élèves ont réussi à recouvrir ces rectangles 2 × 6, 3 × 6, 4 × 6, 5 × 6 et 6 × 6 par des Petits L.

Sauriez-vous expliquer pourquoi un rectangle 23 × 6 est lui aussi recouvrable par des « Petits L » ?

Sauriez-vous expliquer pourquoi un rectangle 2023 × 6 est lui aussi recouvrable par des « Petits L » ?

Solution

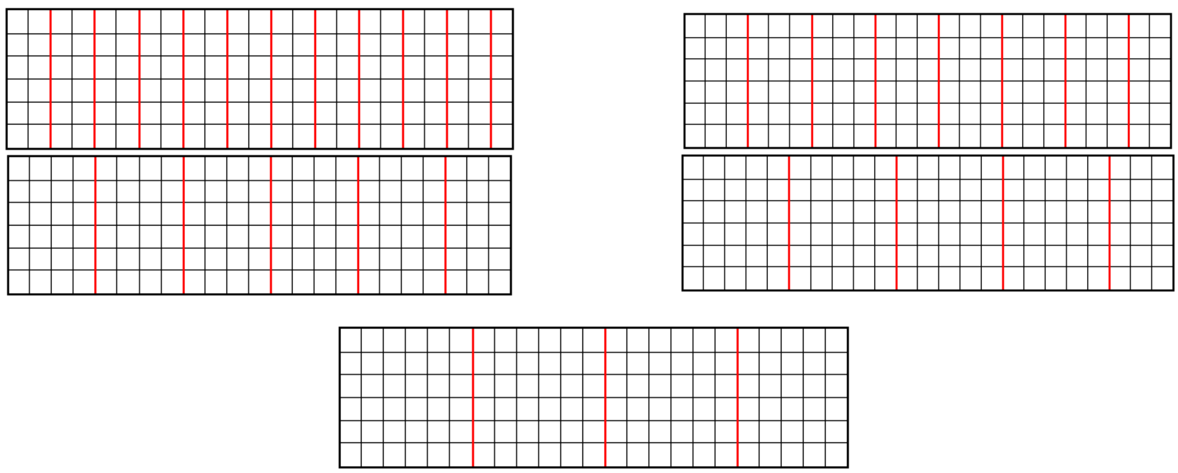
Pour le rectangle 23 × 6

Les pièces utilisées en cycle 2 et proposées avec les documents présents sur notre site sont des assemblages de carrés de 2cm de côté. Les dimensions du rectangle à recouvrir seraient donc 46cm×12cm : il ne peut pas être dessiné sur une feuille A3.

Une possibilité est d’aborder le problème par le recouvrement d’un rectangle de longueur moindre, de faire expliciter la méthode utilisée pour l’appliquer sur un dessin qui ne sera plus à l’échelle des pièces.

Un rectangle 14×6 est utilisable. Il peut être dessiné sur une feuille A4, il peut être recouvert par des « Petits L », il peut aussi être recouvert par des rectangles qui avaient été recouverts par les élèves de cycle 2 (défi à proposer : utiliser le moins possible de rectangles différents et faire émerger le fait qu’on va utiliser le plus possible de rectangle d’un modèle choisi).

La méthode va ensuite être proposée pour des dessins de rectangles 23×6.



Retour au sommaire

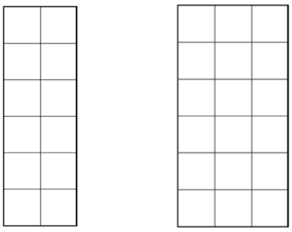
L'utilisation de rectangles 2×6 ne sera pas conservée, : le rectangle 1×6 ne fait pas partie de ceux recouverts par les élèves de cycle 2, il n'est pas recouvrable par deux « Petits L ».

La recherche de « Combien de fois 5 dans 23 ? » ou de « Combien de fois 6 dans 23 ? » va commencer à induire l'usage de divisions euclidiennes.

Une possible solution pour le rectangle 2023 × 6

$2023 = 2020 + 3$

$2023 = 2 \times 1010 + 3$



Le rectangle 6×2023 peut donc être découpé en 1010 rectangles 2×6 et 1 rectangle 3×6. Tous ces rectangles ont recouvrables par des « Petits L ».

Le rectangle 2023×6 est donc recouvrable par des « Petits L ».

D'autres possibles solutions pour le rectangle 2023 × 6

L'envie vient d'utiliser également les rectangles 3×6, 4×6, 5×6 ou le rectangle carré 6×6.

$2023 = 3 \times 674 + 1$

$2023 = 4 \times 505 + 3$

$2023 = 5 \times 404 + 3$

$2023 = 6 \times 337 + 1$

Il y a là l'occasion de faire vivre « en situation » des divisions euclidiennes. L'examen des restes de ces divisions nous persuade que l'utilisation des rectangles 3×1 ou des rectangles 6×1 n'amène pas à un recouvrement du rectangle 2023×6 : le rectangle 1×6 n'est pas recouvrable par deux « Petits L ».

Au cycle 4

Tout rectangle ayant une des dimensions est égale à 6 (et l'autre différente de 1) est-il recouvrable par des « Petits L » ?

Il est facile de se convaincre que le rectangle 1×6 ne peut pas être recouvert par des « Petits L ».

Nous considérons donc les rectangles $n \times 6$ (avec $n \neq 1$).

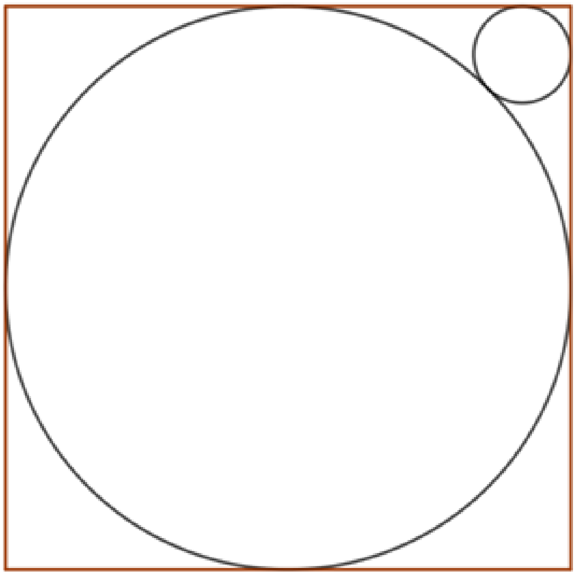
Si n est pair, nous pouvons écrire $n = 2p$. Le rectangle $6 \times n$ est donc obtenu par juxtaposition de p rectangles 2×6 recouvrables par des « Petits L ». Il est donc lui aussi recouvrable par des « Petits L ».

Si n est impair, nous pouvons écrire $n = 2p + 1$ ou $n = 2(p - 1) + 3$. Le rectangle $6 \times n$ est donc obtenu par juxtaposition de $p - 1$ rectangles 2×6 et d'un rectangle 3×6 tous recouvrables par des « Petits L ». Il est donc lui aussi recouvrable par des « Petits L ».

Manipulation, schématisation, raisonnement arithmétique et raisonnement algébrique se sont donné la main pour faciliter la résolution de ces défis.

Retour au sommaire

SOLUTION DÉFI 154 – 2
DEUX CERCLES DANS UN CARRÉ

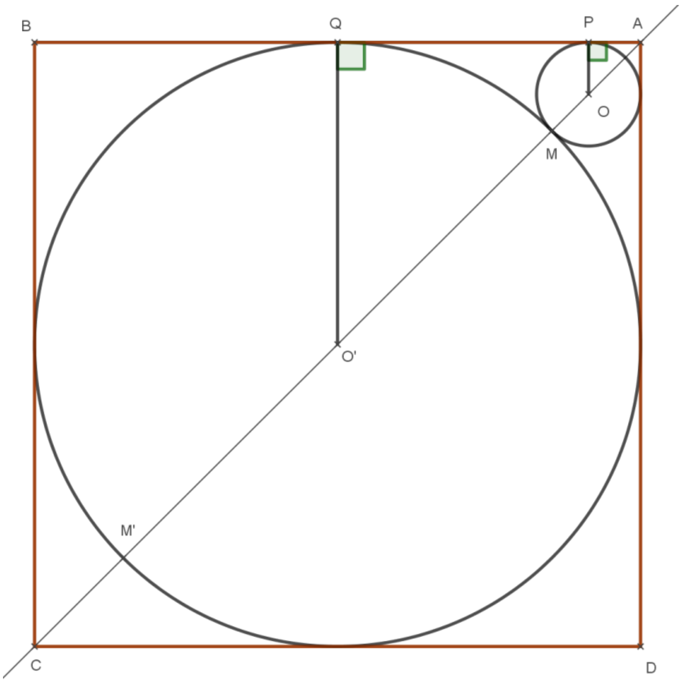


Le grand cercle est inscrit dans le carré et tangent au petit cercle. Le petit cercle est tangent à deux côtés du carré.
Déterminer la longueur du côté du carré sachant que le petit cercle a pour rayon 1.

Solution

1ère démarche :

D'après les propriétés de la figure, les triangles AO'Q et AOP sont rectangles et isocèles respectivement en Q et en P.
Et on a :
AQ = QO' = R
AP = PO = 1
En appliquant le théorème de Pythagore à ces deux triangles, on obtient :
AO = $\sqrt{2}$ et AO' = $R\sqrt{2}$
De plus, AO' = AO + OM + MO'
On en déduit que :
$R\sqrt{2} = R + 1 + \sqrt{2}$ D'où :
$R = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \left(\sqrt{2}+1\right)^2$ Le grand cercle étant inscrit dans le carré ABCD, son côté vaut le double du rayon de ce cercle et donc :
AB = $2\left(\sqrt{2}+1\right)^2$



Retour au sommaire

2

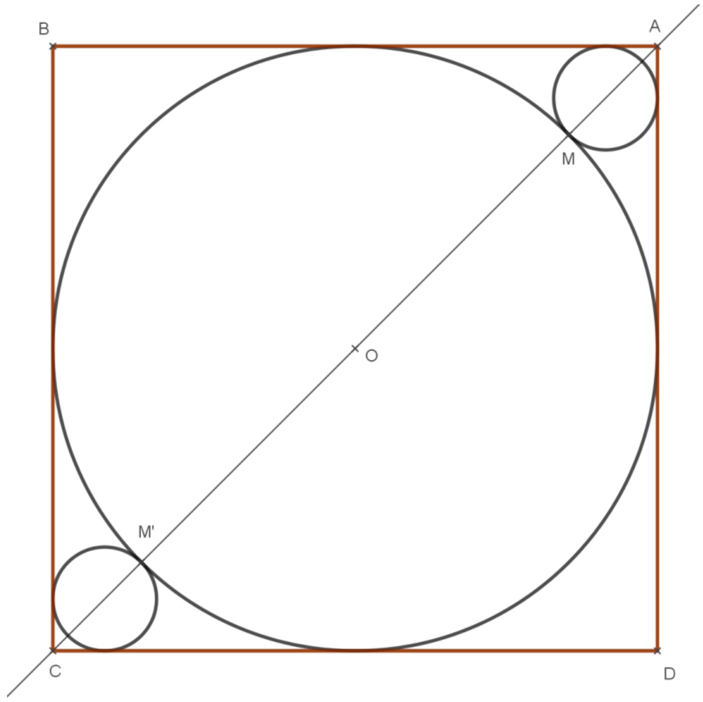
2ème démarche : en utilisant une homothétie

On cherche la longueur AB sachant que le grand cercle est inscrit dans le carré ABCD.

Des propriétés de la figure, on peut déduire que la longueur recherchée est égale au diamètre du grand cercle.

Et que le grand cercle est l'image du petit cercle par l'homothétie de centre A et de rapport $k = \dfrac{AM'}{AM}$.

Ainsi, le diamètre du grand cercle vaut k fois le diamètre du petit cercle soit $2k$.



On a : $AC = AM + AM'$ et $AM' = kAM$

Donc $AC = AM(k+1)$

D'autre part, $AC = AB\sqrt{2}$ et $AB = MM' = AM' - AM = AM(k-1)$

D'où $AC = AM(k-1)\sqrt{2}$

Il en résulte que :

$$AM(k+1) = AM(k-1)\sqrt{2}$$

Ou encore :

$$k+1 = (k-1)\sqrt{2}$$

Le rapport k est donc solution de l'équation $x + 1 = \sqrt{2}(x-1)$

$$\sqrt{2}+1 = x\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$$x = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

$$x = \left(\sqrt{2}+1\right)^2$$

$$x = 3 + 2\sqrt{2}$$

L'unique solution de cette équation est le nombre $3 + 2\sqrt{2}$.

Donc, le rapport k de cette homothétie est $3 + 2\sqrt{2}$.

Et par suite, la longueur du côté du carré ABCD vaut $6 + 4\sqrt{2}$

Retour au sommaire

PROBLÈME 155
TOUTES LES FACES

Proposé par Philippe Févotte

Un jeu consiste à lancer un dé tétraédrique, de faces numérotées de 1 à 4, autant de fois que nécessaire jusqu'à obtenir toutes les faces de 1 à 4.

Si on réussit à obtenir toutes les faces en 8 coups ou moins, on gagne 2 euros ; sinon on perd 1 euro.

Quelle est l'espérance de gain à ce jeu ?

SOLUTION PROBLÈME 154
DIFFÉRENCES D'AU PLUS DEUX

Enoncé de Jacques CHONÉ: Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et u_n le nombre de nombres à n chiffres, n'utilisant que les chiffres 1, 2, 3 ou 4 et tels que deux chiffres consécutifs diffèrent d'au plus 2.
On convient que $u_1 = 4$. Déterminer une formule explicite donnant u_n en fonction de n.

Une solution a été proposée par André Stef.

Appelons bon nombre, un nombre n'utilisant que les chiffres 1, 2, 3 ou 4 et tels que deux chiffres consécutifs diffèrent d'au plus 2. Si on note E_n l'ensemble des bons nombres à n chiffres, tout nombre x de E_{n+1} s'écrit comme un nombre y de E_n suivi :

- d'un 1, 2 ou 3 si y se termine par 1
- d'un 1, 2, 3 ou 4 si y se termine par 2
- d'un 1, 2, 3 ou 4 si y se termine par 3
- d'un 2, 3 ou 4 si y se termine par 4

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, on note :
a_n le nombre de bons nombres à n chiffres finissant par 1
b_n le nombre de bons nombres à n chiffres finissant par 2
c_n le nombre de bons nombres à n chiffres finissant par 3
d_n nombre de bons nombres à n chiffres finissant par 4
Par des raisons de symétrie, on a immédiatement $a_n = d_n$ et $b_n = c_n$.
On en déduit que $u_n = 2a_n + 2b_n$.
En considérant les cas énoncés précédemment, on obtient les relations :

Retour au sommaire

$$a_{n+1} = a_n + 2b_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = 2a_n + 2b_n \ (= u_n) \ (*)$$

On peut donc écrire, pour tout entier n non nul, la relation matricielle

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \text{ en notant } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice A a pour équation caractéristique $(1 - r)(2 - r) - 4 = 0$. Elle deux valeurs propres $r_1 = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}$ et $r_2 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$; elle est donc diagonalisable et il existe une matrice de passage P telle que $A = P^{-1}DP$ avec $D = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$

On en déduit que : $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$, soit : $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = P^{-1} D^{n-1} P \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ ou encore :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} r_1^{n-1} & 0 \\ 0 & r_2^{n-1} \end{pmatrix}^{n-1} P \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

L'écriture des deux valeurs propres n'incite pas à déterminer les vecteurs propres, on va donc établir la formule par un calcul direct.

En effet, a_n et b_n sont donc des combinaisons linéaires de r_1^{n-1} et r_2^{n-1}, et par conséquent u_n également.

Il existe donc deux réels α et β tels que $u_n = \alpha r_1^{n-1} + \beta r_2^{n-1}$

Avec $E_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, on obtient $a_1 = b_1 = 1$, puis $a_2 = 3$ et $b_2 = 4$, soit $u_1 = 4$ et $u_2 = 14$.

En utilisant ces deux premiers termes, on détermine les réels $\alpha = 2 - \frac{8}{\sqrt{17}}$ et $\beta = 2 + \frac{8}{\sqrt{17}}$

Ainsi

$$u_n = \left(2 - \frac{8}{\sqrt{17}}\right)\left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}\right)^{n-1} + \left(2 + \frac{8}{\sqrt{17}}\right)\left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right)^{n-1}$$

ou encore en ramenant à une puissance de n :

$$u_n = \frac{-5 + \sqrt{17}}{2\sqrt{17}} \left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}\right)^n + \frac{5 + \sqrt{17}}{2\sqrt{17}} \left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right)^n$$

André Stef fait plusieurs remarques :

Remarque 1 :

Un calcul des puissances en faisant apparaitre séparément les exposants pairs et impairs met en évidence que le résultat est rationnel (à défaut de montrer qu'il est entier).

Remarque 2 :

On pouvait se passer des calculs matriciels en remarquant que, par soustraction des premières relations, on obtient $b_{n+1} = a_{n+1} + a_n$

On en déduit immédiatement que

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2a_n$$

De même

Retour au sommaire

$$b_{n+2} = 2a_{n+1} + 2b_{n+1}$$

$$b_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n + 2a_n + 2b_{n+1},$$

Donc $$b_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n + 2a_n + 2b_{n+1}$$

Donc $$b_{n+2} = 4b_n + (b_{n+1} - 2b_n) + 2b_{n+1}$$

Soit $$b_{n+2} = 4b_n + (b_{n+1} - 2b_n) + 2b_{n+1}$$

D'où $$b_{n+2} = 3b_{n+1} + 2b_n$$

a_n et b_n suivant la même relation de récurrence, il en est de même pour u_n ; donc la suite u_n vérifie :

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n$$

La suite (u_n) est donc une suite linéaire d'ordre 2 qu'on sait déterminer par des moyens classiques.

En fait, on pouvait obtenir directement cette dernière relation en remarquant que

$$u_{n+2} = 2a_{n+2} + 2b_{n+2}$$

Donc $$u_{n+2} = 2(a_{n+1} + 2b_{n+1}) + 2(2a_{n+1} + 2b_{n+1})$$

Soit $$u_{n+2} = 6a_{n+1} + 8b_{n+1}$$

Ou encore $$u_{n+2} = 3\left(2a_{n+1} + 2b_{n+1}\right) + 2b_{n+1}$$

D'où finalement en utilisant la relation (*) : $$u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n$$

C'est la méthode développée par Jacques Choné, qui par ailleurs fait remarquer que cette suite (u_n) est la suite A055099 de l'OEIS (oeis.org).

" LE PETIT VERT " est le bulletin de la régionale **APMEP Lorraine**.

Né en 1985, il complète les publications nationales que sont le bulletin «Au fil des maths» et le BGV. Il parait quatre fois dans l'année (mars, juin, septembre et décembre).

Son but est d'une part d'**informer** les adhérents lorrains sur l'action de la Régionale et sur la "vie mathématique" locale, et d'autre part de **permettre les échanges "mathématiques"** entre les adhérents.

Il est alimenté par les contributions des uns et des autres ; chacun d'entre vous est vivement sollicité pour y écrire un article et cet article sera le bienvenu : les propositions sont à envoyer à redactionpetivert@apmeplorraine.fr.

Le Comité de rédaction est composé de Geneviève Bouvart, Fathi Drissi, François Drouin, Françoise Jean, Christelle Kunc, Laetitia Ludwigs, Léa Magnier, Aude Picaut, Michel Ruiba, Jacques Verdier et Gilles Waehren.

La couverture du Petit Vert n° 155 est réalisée par Léa Magnier.

Retour au sommaire