PROBLÈME 154
DIFFÉRENCES D'AU PLUS DEUX

Proposé par Jacques Choné

Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et u_n le nombre de nombres à n chiffres, n'utilisant que les chiffres 1, 2, 3 ou 4 et tels que deux chiffres consécutifs diffèrent d'au plus 2.
On convient que $u_1 = 4$. Déterminer une formule explicite donnant u_n en fonction de n.

SOLUTION PROBLÈME 153
DES TROUS

Proposé par Philippe Févotte

Rappel de l'énoncé :
Soient a et b deux nombres entiers naturels strictement positifs.
On note $S_{a,b} = \{ka + lb\ ,\ k \in \mathbb{N}\ ,\ l \in \mathbb{N}\}$ et $T_{a,b} = \mathbb{N} \setminus S_{a,b}$
(les éléments de $T_{a,b}$ sont les entiers naturels qui ne peuvent pas s'écrire comme combinaison de a et b ; on dira qu'ils sont des trous dans $\mathbb{N}$ relativement à a et b)

1) Décrire $S_{4,7}$.

2) À quelle condition $T_{a,b}$ est-il fini ?

3) On suppose qu'on est dans la condition où $T_{a,b}$ est fini.

(a) Montrer qu'il existe un nombre entier $c_{a,b}$ tel que pour tout entier $n \geqslant c_{a,b}$ alors $n \in S_{a,b}$

(b) Montrer que $\text{Card}\left(T_{a,b}\right) \geqslant \frac{1}{2} c_{a,b}$

Solution :
Sans proposition de solution à cet exercice, je vous propose la mienne, qui n'est pas la plus courte, mais qui fait intervenir des concept simples.

1) $S_{4,7} = \{4k + 7l\ ,\ k \in \mathbb{N} \text{ et } l \in \mathbb{N}\}$

$4\mathbb{N} = \{4k\ ,\ k \in \mathbb{N}\} = \{0\ ,\ 4\ ,\ 8\ ,\ 12\ ,\ 16\ ,\ 20\ ,\ 24\ ,\ \ldots\}$

En ajoutant successivement 7, 14, 21, … aux nombres ci-dessus, on obtient successivement les ensembles :

$\{0, 4, 7, 8, 11, 12, 15, 16, 19, 20, 23, 24,\ \ldots\}$

$\{0, 4, 7, 8, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24,\ \ldots\}$

Retour au sommaire

$\{0, 4, 7, 8, 11, 12, 14, 15, 16, \mathbf{18}, \mathbf{19}, \mathbf{20}, 21, 22, 23, 24, \ \dots\}$

Dans ce dernier ensemble, on note la présence de quatre nombres consécutifs à partir de 18. En ajoutant des multiples de 4, on peut atteindre tout nombre supérieur ou égal à 18.

Par conséquent on atteint tous les entiers naturels à l'exception des éléments de $T_{4,7} = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 13, 17\}$

2) Soit $d = \text{pgcd}(a, b)$

- Si $d \neq 1$, toute combinaison de a et b sera un multiple de d ; donc tout entier non multiple de d appartient à $T_{a,b}$ et par conséquent $t_{a,b}$ n'est pas fini.
- Si $d = 1$, alors il existe un couple d'entiers relatifs α et β tels que $a\alpha + b\beta = 1$. Les nombres a et b étant des entiers naturels, l'un des nombres α ou β est négatif. On suppose dans la suite que $\alpha < 0$ (dans le cas contraire, on intervertira a et b dans le raisonnement qui suit).

  Pour montrer que $T_{a,b}$ est fini, il suffit de montrer qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$, tel que tout entier supérieur ou égal à N_0 soit un élément de $S_{a,b}$.

  Pour cela, comme remarqué dans l'exemple traité dans la première question, il suffit de trouver un entier naturel q tel que $I_q = \{qa, qa + 1, qa + 2, \dots, qa + a - 1\} \subset S_{a,b}$. En effet, en ajoutant des multiples de a on pourra atteindre tous les entiers supérieurs ou égaux à qa .

  Soit p_0 un entier naturel ; on a deux possibilités :

  - Ou bien $I_{p_0} \subset S_{a,b}$ et d'après la remarque précédente, le problème est résolu.
  - Ou bien $I_{p_0} \not\subset S_{a,b}$; il existe alors un entier r_0 compris entre 1 et $a - 1$ tel que $p_0a + r_0$ soit le plus petit trou de I_{p_0} (on dira que ce trou est de rang r_0 dans I_{p_0}).
    Par conséquent tout nombre de I_{p_0}, inférieur à $p_0a + r_0$ est un élément de $S_{a,b}$, en particulier $p_0a + r_0 - 1$.
    Considérons le nombre $s = |\alpha|a + p_0a + r_0$
    $s = |\alpha|\, a + p_0a + r_0 - 1 + 1 = -\alpha a + p_0a + r_0 - 1 + \alpha a + \beta b$
    $s = (p_0a + r_0 - 1) + \beta b$ est écrit comme somme de deux nombres de $S_{a,b}$, évidemment stable par addition, donc $s \in S_{a,b}$.
    Comme $s = \big(|\alpha| + p_0\big)a + r_0 \in S_{a,b}$, dans l'intervalle $I_{|\alpha|+p_0}$, le premier trou, s'il existe sera de rang $r_1 > r_0$.
    En réitérant autant que nécessaire, on obtiendra un intervalle I_q sans trou, donc inclus dans $S_{a,b}$. C'est ce qu'on cherchait à déterminer.

En conclusion $T_{a,b}$ est fini si et seulement si les nombres a et b sont premiers entre eux.

3) (a) On suppose que $T_{a,b}$ est fini et on note $t_{a,b}$ son plus grand élément. Ce qui signifie que tout nombre entier strictement supérieur à $t_{a,b}$ est un élément de $S_{a,b}$. En notant $c_{a,b} = t_{a,b} + 1$, on a bien : $\forall n \in N\ ,\ n \geqslant c_{a,b}\ ,\ n \in S_{a,b}$

(b) $t_{a,b}$ est par définition le plus grand trou.

Soit n un entier compris entre 0 et $t_{a,b}$. Dans ce cas $t_{a,b} - n$ est également compris entre 0 et $t_{a,b}$.

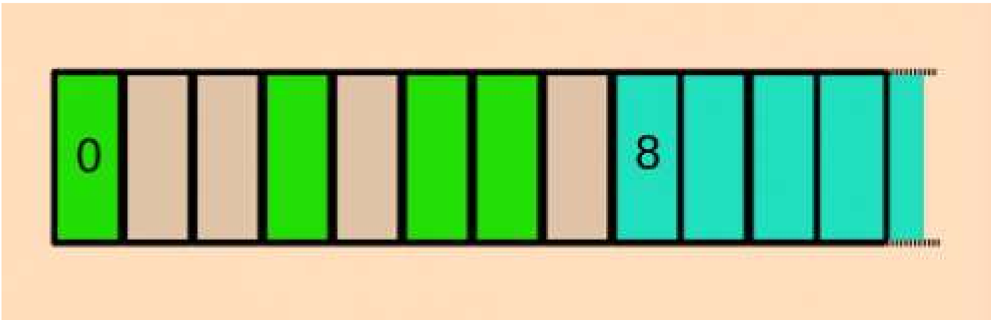
Supposons que n et $t_{a,b} - n$ sont des éléments de $S_{a,b}$. Alors leur somme $t_{a,b}$ sera un élément de $S_{a,b}$. C'est impossible par définition de $t_{a,b}$.

Par conséquent au moins un des deux nombres n ou $t_{a,b} - n$ est un trou. On en déduit que $\mathrm{Card}(T_{a,b}) \geqslant \dfrac{t_{a,b}+1}{2}$, soit $\mathrm{Card}(T_{a,b}) \geqslant \dfrac{1}{2}c_{a,b}$

Cet exercice est inspiré d'un article proposé par le site « images des mathématiques » : http://images.math.cnrs.fr/Semigroupes-numeriques-et-conjecture-de-Wilf-3865.html

On y trouve des résultats plus précis, comme :

- Un théorème attribué à James J. Sylvester qui montre que lorsque les nombres a et b sont premiers entre eux, alors $c_{a,b} = (a-1)(b-1)$ et $\mathrm{Card}\left(T_{a,b}\right) = \frac{1}{2}c_{a,b}$.
- Une extension du problème à l'étude de $S_{a_1,a_2,\dots a_r}$ et à la difficile recherche de $c_{a_1,a_2,\dots a_r}$



Retour au sommaire