ÉTUDE MATHÉMATIQUE

LA CONJECTURE D'ERDÖS-STRAUS

Fathi Drissi

Paul Erdős et Ernst Gabor Straus ont conjecturé en 1948 que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, le nombre rationnel $\frac{4}{n}$ peut être exprimé comme la somme de trois fractions unitaires, c'est-à-dire qu'il existe trois entiers naturels non nuls x, y et z tels que :

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Pour démontrer cette conjecture, on peut se limiter au cas où n est un nombre premier.
En effet, s'il existe trois entiers naturels non nuls x, y et z tels que $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, alors $\frac{4}{pn} = \frac{1}{px} + \frac{1}{py} + \frac{1}{pz}$ où p est un nombre entier strictement positif.

Les nombres premiers impairs étant congrus à -1 ou 1 modulo 4, on est tenté d'étudier les deux cas séparément.
Soit n un nombre premier.
On suppose que n est congru à -1 modulo 4, alors il existe un nombre entier strictement positif k tel que $n = 4k - 1$.
Or, l'identité de Fibonacci permet de décomposer toute fraction unitaire en une somme de deux fractions égyptiennes.

Plus formellement, pour tout entier m strictement positif, on a :

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m(m+1)}$$

Donc, en appliquant cette identité à $\frac{4}{4k-1}$, on obtient :

$$\frac{4}{n} = \frac{4}{4k-1} = \frac{4}{4k} + \frac{4}{4k(4k-1)} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k(4k-1)} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{k(4k-1)}$$

On peut même obtenir une décomposition en somme de trois fractions égyptiennes en appliquant à nouveau l'identité de Fibonacci à la fraction $\frac{1}{k}$:

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k(4k-1)} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{k(4k-1)}$$

S'il a été facile de prouver la conjecture pour n premier et congru à -1 modulo 4, il n'en est rien pour le cas où n est premier et congru à 1 modulo 4.
Soit n un nombre premier congru à 1 modulo 4. Il existe alors un nombre entier strictement positif k tel que $n = 4k + 1$.

Retour au sommaire

Si k est impair, c'est-à-dire qu'il existe un entier l tel que $k = 2l + 1$, alors on a :

$$\frac{4}{4k+1} = \frac{4}{8l+5} = \frac{4}{8l+8} + \frac{4 \times 3}{(8l+8)(8l+5)} = \frac{1}{2l+2} + \frac{3}{(2l+2)(8l+5)}$$

Cette décomposition s'obtient à l'aide de l'identité suivante :

Pour tout entier m et tout entier d strictement positifs, on a :

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m+d} + \frac{d}{m(m+d)}$$

Ainsi,

$$\frac{4}{4k+1} = \frac{1}{2l+2} + \frac{3}{(2l+2)(8l+5)} = \frac{1}{2(l+1)} + \frac{2}{2(l+1)(8l+5)} + \frac{1}{2(l+1)(8l+5)}$$

Ou encore

$$\frac{4}{4k+1} = \frac{1}{2(l+1)} + \frac{1}{(l+1)(8l+5)} + \frac{1}{2(l+1)(8l+5)}$$

Mais si k est pair, c'est-à-dire qu'il existe un entier l tel que $k = 2l$, les démarches précédentes peuvent être encore suivies pour l congru à -1 modulo 3.
En effet, pour l congru à -1 modulo 3, n est congru à -7 modulo 24 et donc il existe un entier q strictement positif tel que $n = -7 + 24q$.

$$\frac{4}{n} = \frac{4}{-7+24q} = \frac{4}{-4+24q} + \frac{4 \times 3}{(-4+24q)(-7+24q)} = \frac{1}{6q-1} + \frac{3}{(6q-1)(24q-7)}$$

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{6q-1} + \frac{3}{(6q-1)(24q-7)} = \frac{1}{6q-1} + \frac{3}{6q(24q-7)} + \frac{3}{6q(6q-1)(24q-7)}$$

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{6q-1} + \frac{1}{2q(24q-7)} + \frac{1}{2q(6q-1)(24q-7)}$$

L'entier l ne peut être congru à 1 modulo 3, sinon n serait congru à 9 modulo 24 et donc divisible par 3 ce qui contredit l'hypothèse que n est premier.

Il reste le cas où l est divisible par 3 et donc n congru à 1 modulo 24.
Pour ce cas et en écrivant $n = 24s + 1$ avec s un entier strictement positif, on peut éliminer le cas où s est congru à 1 modulo 5, sinon n serait congru à 25 modulo 120 qui est en contradiction avec n premier.
Il reste les cas où s est congru à 0 ; 2 ; 3 ou 4 modulo 5 ou encore n congru à 1 ; 49 ; 73 ou 97 modulo 120. On bloquera à nouveau devant le cas où n est congru à 1 modulo 120 et, en poursuivant ainsi, on va d'une impasse à une autre. Cela est dû au fait qu'il n'existe pas de solution générale par une formule polynomiale, un résultat démontré par le mathématicien polonais A. Schinzel.

Par ailleurs, Louis J. Mordell a pu démontrer en 1969 que la conjecture est vérifiée sauf pour les nombres premiers congrus à 1 ; 11^2 ; 13^2 ; 17^2 ; 19^2 et 23^2 modulo 840.

Nous remarquons toutefois qu'il est aisé de trouver une formule polynomiale pour les classes de nombres $n + 1$, $n + 4$, $4n + 1$ et $n^2 + 4$ ayant un diviseur de la forme $4p - 1$ et où n est un nombre premier congru à 1 modulo 4.

Retour au sommaire

Proposition 1

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 3.

Si $n+1$ possède un diviseur congru à –1 modulo 4, alors le nombre rationnel $\frac{4}{n}$ peut être exprimé comme la somme de trois fractions égyptiennes.

Preuve

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 3.

Supposons que $n+1$ possède un diviseur de la forme $4p-1$ avec p entier strictement positif.

Il existe alors un entier q strictement positif tel que $n+1=q(4p-1)$.

$$\frac{4}{n}=\frac{4p}{pn}=\frac{4p-1}{pn}+\frac{1}{pn}$$

En appliquant l'identité de Fibonacci, on obtient :

$$\frac{4}{n}=\frac{4p-1}{p(n+1)}+\frac{4p-1}{pn(n+1)}+\frac{1}{pn}$$

$$\frac{4}{n}=\frac{4p-1}{pq(4p-1)}+\frac{4p-1}{pqn(4p-1)}+\frac{1}{pn}$$

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{pq}+\frac{1}{pqn}+\frac{1}{pn}$$

Proposition 2

Soit n un nombre premier et congru à 1 modulo 4.

Si dans la décomposition en produit de facteurs premiers de $4n+1$ il y au moins un facteur congru à –1 modulo 4, alors le nombre rationnel $\frac{4}{n}$ peut être exprimé comme la somme de trois fractions égyptiennes.

Preuve

Soit n un nombre premier et congru à 1 modulo 4.

Supposons que $4n+1$ possède un diviseur de la forme $4p-1$ avec p entier strictement positif.

Or, n est congru à 1 modulo 4.

Donc, $4n+1$ est congru à 1 modulo 4 et il existe un entier q strictement positif tel que $4n+1=(4q-1)(4p-1)$.

On a :

$$4n+1=(4q-1)(4p-1)$$

$$\Leftrightarrow 4n+1=16pq-4p-4q+1$$

$$\Leftrightarrow n=4pq-p-q$$

D'où :

$$\frac{4}{n}=\frac{4pq}{pqn}=\frac{4pq-p-q}{pqn}+\frac{1}{pn}+\frac{1}{qn}$$

Ou encore :

Retour au sommaire

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{pq}+\frac{1}{pn}+\frac{1}{qn}$$

Proposition 3

Soit un nombre premier et congru à 1 modulo 4.

Si dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n^2+4, il y au moins un facteur congru à -1 modulo 4, alors le nombre rationnel $\frac{4}{n}$ peut être exprimé comme la somme de trois fractions égyptiennes.

Preuve

Soit n un nombre premier et congru à 1 modulo 4.

On peut donc écrire $n=4k+1$ où k est un entier strictement positif.

Supposons que dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n^2+4, il y ait un facteur premier de la forme $4p-1$ avec p entier strictement positif.

Alors son exposant est pair en vertu du théorème des deux carrés, puisque n^2+4 est la somme de deux carrés.

> **Théorème des deux carrés**
>
> Un entier naturel n est somme de deux carrés parfaits si et seulement si, dans la décomposition en facteurs premiers de n, tous les facteurs premiers de la forme $4p-1$ ont des exposants pairs.

Il existe donc deux entiers a et b strictement positifs tels que : $n^2+4=(4a-1)(4b-1)$

On pose $x=a+k$ et $y=b+k$.

On a : $n^2+4=(4x-4k-1)(4y-4k-1)=(4x-n)(4y-n)$

$$n^2+4=16xy-4xn-4yn+n^2$$

$$1=4xy-xn-yn$$

$$xn+1=y(4x-n)$$

Ainsi, $4x-n$ divise $xn+1$

$$\frac{4}{n}-\frac{1}{x}=\frac{4x-n}{xn}=\frac{4x-n}{xn+1}+\frac{4x-n}{xn(xn+1)}=\frac{4x-n}{y(4x-n)}+\frac{4x-n}{xyn(4x-n)}=\frac{1}{y}+\frac{1}{xyn}$$

D'où

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xyn}$$

Proposition 4

Soit n un nombre premier et congru à 1 modulo 4.

Si dans la décomposition en produit de facteurs premiers de $n+4$ il y au moins un facteur congru à -1 modulo 4, alors le nombre rationnel $\frac{4}{n}$ peut être exprimé comme la somme de trois fractions égyptiennes.

Preuve

Retour au sommaire

Soit n un nombre premier et congru à 1 modulo 4.

Supposons que $n+4$ possède un diviseur de la forme $4p-1$ avec p entier strictement positif.

n est congru à 1 modulo 4. Alors il existe k tel que $n=4k+1$

Donc, $n+4$ est congru à 1 modulo 4 et il existe un entier q strictement positif tel que $n+4=(4q-1)(4p-1)$.

On a :

$$\Leftrightarrow n+4=(4q-1)(4p-1)$$

$$\Leftrightarrow n+4=16pq-4p-4q+1$$

$$\Leftrightarrow 4k+4=16pq-4p-4q$$

$$\Leftrightarrow k+1=4pq-p-q$$

$$\Leftrightarrow k+p+1=q(4p-1)$$

Et :

$$\frac{4}{n}-\frac{1}{k+p}=\frac{4k+4p-n}{n(k+p)}=\frac{4p-1}{n(k+p)}$$

En appliquant l'identité de Fibonacci, on obtient :

$$\frac{4}{n}-\frac{1}{k+p}=\frac{4p-1}{n(k+p+1)}+\frac{4p-1}{n(k+p)(k+p+1)}$$

Il en résulte que :

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+p}+\frac{4p-1}{qn(4p-1)}+\frac{4p-1}{qn(4p-1)(k+p)}$$

Ou encore :

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+p}+\frac{1}{qn}+\frac{1}{qn(k+p)}$$

Retour au sommaire