***VIE DES LABOMATHS***

# THÉORÈME DE PYTHAGORE

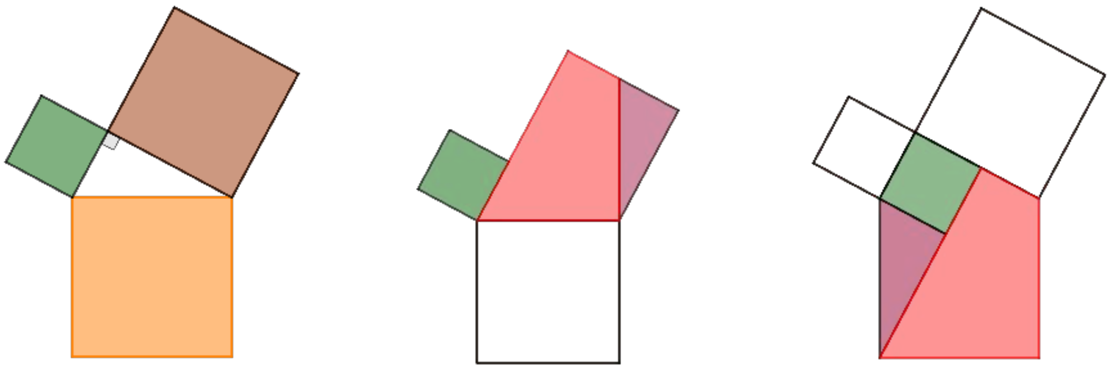
Fathi Drissi
Le Moulin des Mathématiques
Labo-maths du collège Louis Armand de Moulins-Lès-Metz

J'ai découvert les deux découpages ci-dessous, permettant de démontrer le théorème de Pythagore, dans le cadre d'une réflexion menée au sein du labo-maths de mon collège et dont le thème portait sur l'enseignement de ce théorème dans nos classes de quatrième. Ces découpages ne semblent pas avoir été signalés et ne sont pas évoqués dans les ressources suivantes :

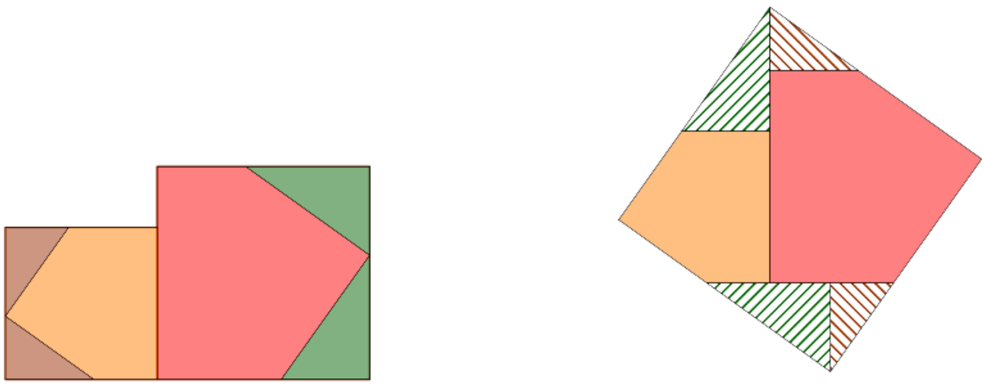
- Le livre « Curiosités géométriques » d'Émile Fourrey ;
- Le livre « The Pythagorean Proposition » d'Elisha S. Loomis ;
- Un blog présentant 122 démonstrations.

Il est surprenant de voir que l'on peut encore découvrir de nouvelles preuves pour le théorème de Pythagore étant donné qu'il est celui dont on a donné le plus de démonstrations.

**1er découpage**



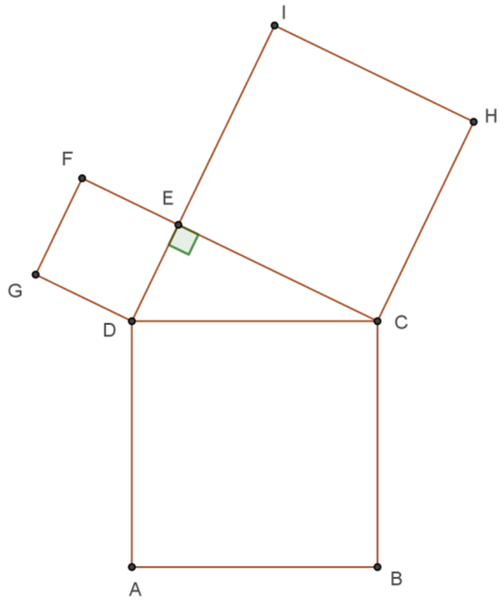
**2ème découpage**



Retour au sommaire

## Démonstrations

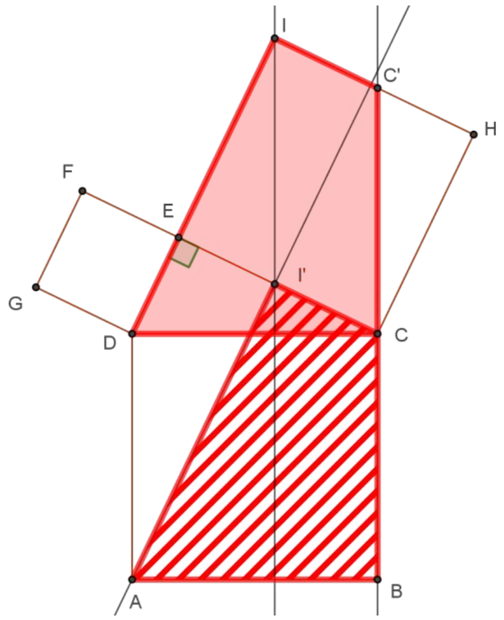
### 1er découpage




Soit DEC un triangle rectangle en E.

Sur chaque côté et à l'extérieur de ce triangle, on construit les carrés ABCD, DEFG et HCEI.

Démontrer le théorème de Pythagore revient à démontrer que la somme des aires des carrés DEFG et HCEI est égale à l'aire du carré ABCD.




La droite (BC) coupe (IH) en C'.

La parallèle à (BC) passant par I coupe [CE] en I'.

**Démontrons que le quadrilatère BCI'A est l'image du quadrilatère CC'ID par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$ :**

Comme HCEI est un carré, les droites (CE) et (HI) sont parallèles.
Et par construction, (II') et (CC') sont parallèles.
Il en résulte que CC'II' est un parallélogramme.
D'où : $\overrightarrow{C'C} = \overrightarrow{II'}$ .

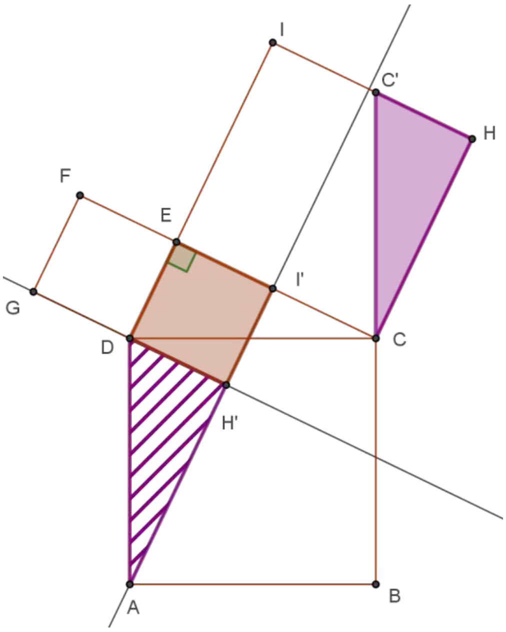
Par ailleurs, les triangles rectangles CC'H et DEC ont un côté de même longueur, CH = CE, compris entre deux angles deux à deux de même mesure : $\widehat{CHC'} = \widehat{CED}$ et $\widehat{HCC'} = \widehat{DCE}$. Donc ils sont isométriques et par suite CC' = CD.

On a II' = CC' = CD et CD = AD, donc II' = AD.
(AD)//(BC) et (II')//(BC), donc (AD)//(II').
D'où, ADII' est un parallélogramme et $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{II'}$ .

De plus, ABCD est un carré donc $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$.
Ainsi : $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{II'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CB}$ .

Et par conséquent, le quadrilatère BCI'A est l'image du quadrilatère CC'ID par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$ et donc ces quadrilatères ont la même aire.

Retour au sommaire




Soit H′ le point d’intersection de (GD) et (AI′).

**Démontrons que les triangles ADH′ et CC′H sont isométriques et que DEI′H′ est un carré.**

Les droites (DI) et (AI′) sont parallèles et (DG) est perpendiculaire à (DI), donc (GD) est perpendiculaire à (AI′).

Il s’ensuit que AH′D est rectangle en H′ et puisque les angles $\widehat{ADH'}$ et $\widehat{H'DC}$ sont complémentaires, on peut déduire que les angles $\widehat{ADH'}$ et $\widehat{CDE}$ ont la même mesure.

ADH′ et DEC sont donc semblables avec AD = CD.

Ainsi, ADH′ et DEC sont isométriques et par suite DE = DH′.

De plus, le quadrilatère DEI′H′ a ses côtés opposés parallèles et possède un angle droit, c’est donc un carré.

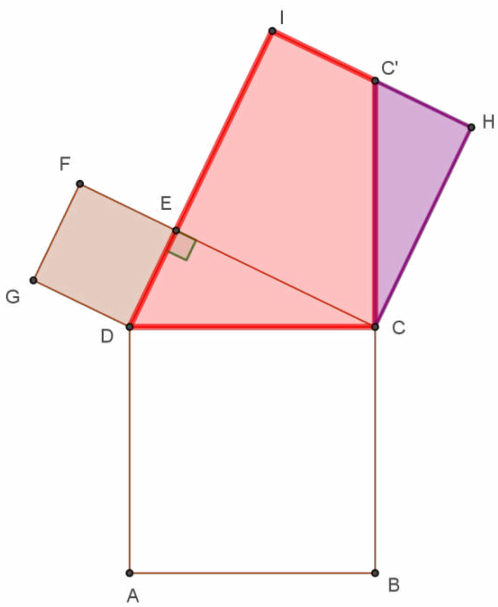
Les carrés DEFG et DEI′H′ ayant le côté [DE] en commun, ils sont superposables et donc de même aire.

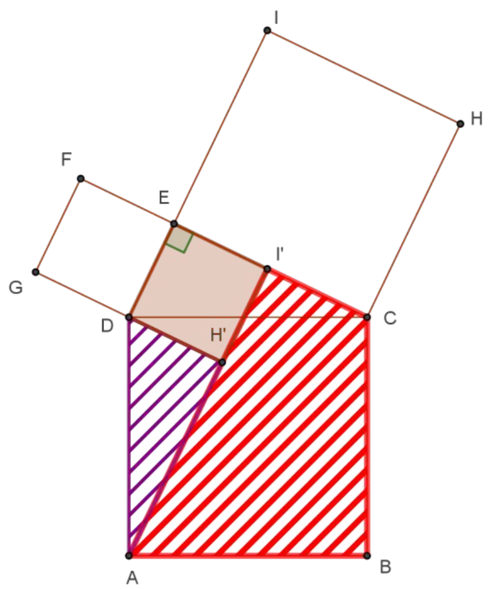
Les triangles ADH′ et DEC sont isométriques, tout comme les triangles CC′H et DEC. Donc les triangles CC′H et ADH′ sont isométriques.

De ce qui précède, nous pouvons déduire que :

$Aire(\mathrm{DEFG}) + Aire(\mathrm{DCC'I}) + Aire(\mathrm{CC'H}) = Aire(\mathrm{ABCI'}) + Aire(\mathrm{DH'I'E}) + Aire(\mathrm{ADH'})$

D’où : $Aire(\mathrm{DEFG}) + Aire(\mathrm{HCEI}) + Aire(\mathrm{DEC}) = Aire(\mathrm{ABCD}) + Aire(\mathrm{DEC})$




En enlevant l’aire du triangle DEC, à chaque membre de l’égalité établie ci-dessus, on obtient :

$Aire(\mathrm{DEFG}) + Aire(\mathrm{HCEI}) = Aire(\mathrm{ABCD})$

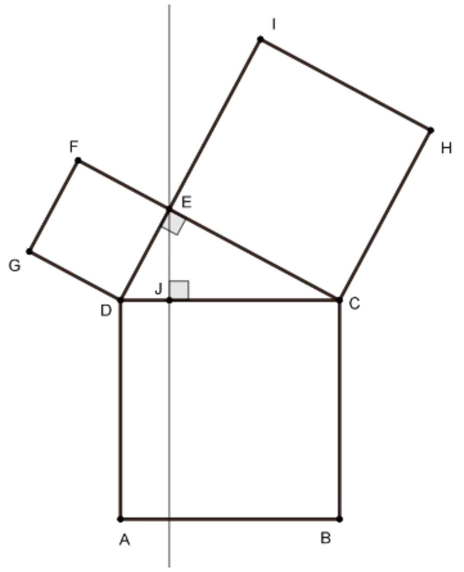
Ou encore : $\mathrm{DE}^2 + \mathrm{CE}^2 = \mathrm{DC}^2$

Retour au sommaire

Le découpage ci-dessus permet de transformer la figure composée des deux carrés DEFG et HCEI et du triangle DEC en la figure composée du carré ABCD et du triangle DEC.

Vous pouvez retrouver une animation de cette démonstration sur GeoGebra.

**Démonstration sans découpage**




Soit DEC un triangle rectangle en E.

Sur chaque côté et à l'extérieur de ce triangle, on construit les carrés ABCD, DEFG et HCEI.

La hauteur du triangle DEC issue de E coupe ce triangle en deux triangles, DEJ et CJE, rectangles en J.

On pose : DE = a, CE = b, CD = c, DJ = d, CJ = e et EJ = h.

Les triangles rectangles DEC, DEJ et CEJ ont leurs angles aigus deux à deux de même mesure, donc ils sont semblables.

D'où :

$(E_1)$ : $\frac{d}{a}=\frac{h}{b}=\frac{a}{c}$ et $(E_2)$ : $\frac{h}{a}=\frac{e}{b}=\frac{b}{c}$.

$Aire(DJEFG) + Aire(HCJEI) = Aire(DEFG) + Aire(DJE) + Aire(HCEI) + Aire(CEJ)$

$Aire(DJEFG) + Aire(HCJEI) = a^2 + \frac{dh}{2} + b^2 + \frac{eh}{2}$

Des égalités $(E_1)$ et $(E_2)$, on déduit que : $a^2 = cd$ et $b^2 = ce$.

$Aire(DJEFG) + Aire(HCJEI) = cd + \frac{dh}{2} + ce + \frac{eh}{2}$

$Aire(DJEFG) + Aire(HCJEI) = c(d + e) + \frac{h}{2}(d + e)$

Or, $d + e = c$

Donc, $Aire(DJEFG) + Aire(HCJEI) = c^2 + \frac{ch}{2}$

De l'égalité $(E_2)$, on déduit que : $ab = ch$.

Et donc : $Aire(DJEFG) + Aire(HCJEI) = c^2 + \frac{ab}{2}$

Ou encore : $Aire(DJEFG) + Aire(HCJEI) = Aire(ABCD)$

**2ème découpage**

Sur la figure ci-contre, on considère un triangle CDE rectangle en E.

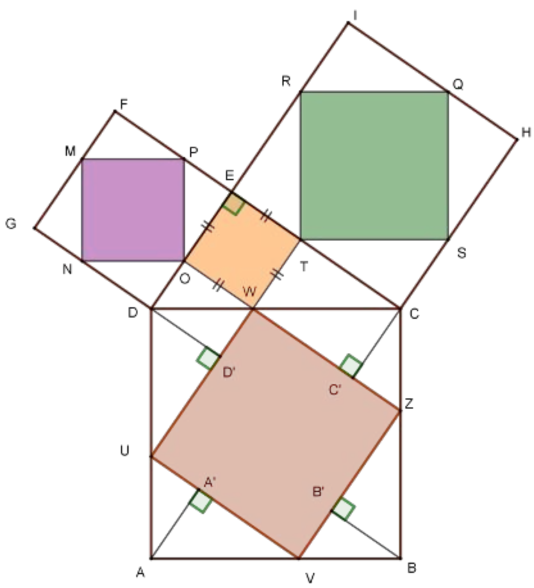
Sur chaque côté et à l'extérieur de ce triangle, on construit les carrés ABCD, DEFG et HCEI.

Démontrer le théorème de Pythagore revient à démontrer que la somme des aires des carrés DEFG et HCEI est égale à l'aire du carré ABCD.

Soit TWOE le carré inscrit dans le triangle rectangle CDE et $x$ la longueur de son côté.

On pose :

OD = $y$ ; CT = $z$ ; DW = $a$ et WC = $b$




Retour au sommaire

On construit les carrés MNOP inscrit dans le carré DEFG, SQRT inscrit dans le carré HCEI et UVZW inscrit dans le carré ABCD.

D'une part, les triangles rectangles DOW, DON, GNM, MFP, OPE, DD'W, CC'Z, BB'V et AA'U sont isométriques.
De même pour les triangles WTC, CST, SHQ, QIR, TER, DD'U, WCC', BB'Z et AA'V.

D'autre part, les triangles rectangles DOW, WTC et DEC sont semblables.

Il en résulte que : $\frac{y}{x} = \frac{x}{z} = \frac{a}{b}$
D'où $x^2 = yz$

La somme des aires des carrés DEFG et HCEI est donc égale à :

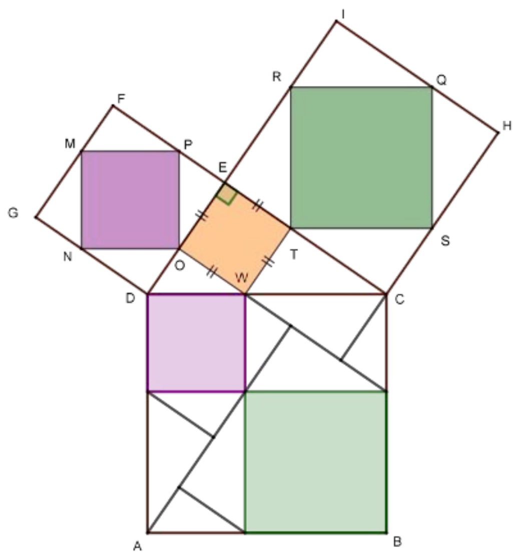
$$S_1 = (x+y)^2 + (x+z)^2$$
$$S_1 = x^2 + y^2 + 2xy + x^2 + z^2 + 2xz$$
$$S_1 = 2x^2 + y^2 + 2xy + z^2 + 2xz$$
$$S_1 = 2yz + y^2 + 2xy + z^2 + 2xz$$
$$S_1 = (y+z)^2 + 2x(y+z)$$

Et l'aire du carré ABCD est égale à la somme des aires des triangles rectangles et isométriques AUV, BVZ, CZW, DUW et du carré UVZW :

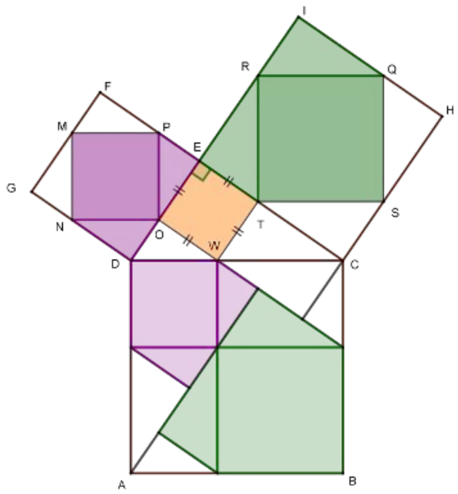
$$S_2 = (y+z)^2 + 4\frac{x(y+z)}{2}$$
$$S_2 = (y+z)^2 + 2x(y+z)$$

On constate que $S_1 = S_2$ et donc l'aire du carré ABCD est égale à la somme des aires des carrés DEFG et HCEI.

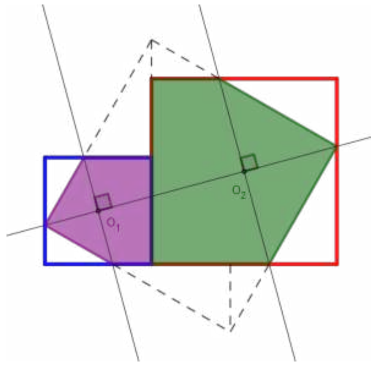
Par ailleurs, cette démonstration permet de retrouver le découpage en dix morceaux de **J. Adams** (figure ci-contre) et cité dans la collection de **Elisha Scott Loomis**, *La proposition pythagoricienne*, sous le numéro 27 en tant que preuve géométrique.



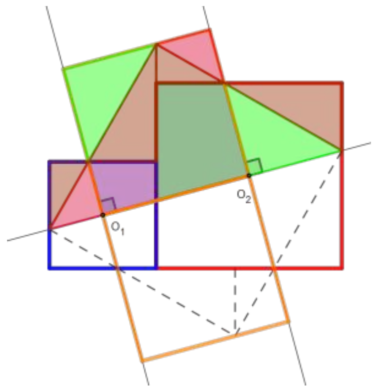

Retour au sommaire




Le nombre de morceaux de ce découpage peut être ramené à six comme le montre la figure ci-contre.



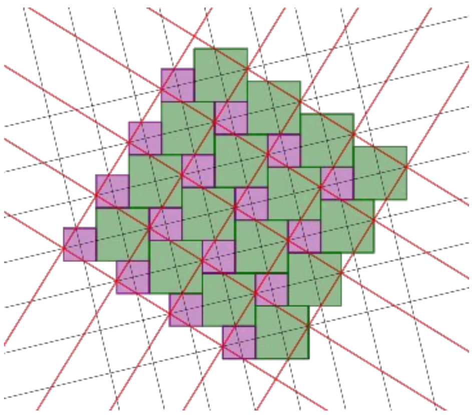

Ce nouveau découpage peut être obtenu à l'aide de la construction ci-contre et en mettant les deux carrés intermédiaires côte à côte. Les points $O_1$ et $O_2$ sont les centres respectifs de ces carrés (figure ci-contre).




On remarquera aussi que cette construction donne un découpage en douze pièces permettant de transformer les deux carrés en un carré ou en deux carrés superposables.

**Illustration par pavage**

On considère le pavage de Pythagore réalisé à l'aide de deux carrés de côtés respectifs $a$ et $\beta$. En superposant sur ce pavage les grilles carrées de dimensions respectives $\gamma$ et $\gamma\frac{\sqrt{2}}{2}$ où $\gamma = \sqrt{a^2 + \beta^2}$, on génère les découpages précédents.



Retour au sommaire