N° 154 Juin 2023

Bulletin de la Régionale Lorraine APMEP

LE PETIT VERT

Régionale de Lorraine
APMEP

www.apmeplorraine.fr

SOMMAIRE

ÉDITO

UN PACTE POUR LES ENSEIGNANTS OU UN PACTE POUR L'ENSEIGNEMENT ?

Gilles Waehren

Le pacte républicain présenté récemment à tous les enseignants voudrait consacrer un engagement fort et durable. Cette forme de contrat devrait permettre aux professeurs de retrouver un pouvoir d'achat digne de ce nom (sans nécessairement abonder leur retraite…). Ainsi, en l'échange d'un remplacement d'heures contractualisé, des primes viendraient compléter la feuille de salaire.

Les absences de professeurs sont inhérentes à leur profession : formation, accompagnement de projet, raison personnelle ; mais, contrairement à d'autres secteurs d'activité, ces heures de cours supprimées ont de nombreuses répercussions. En primaire, où le remplacement est quasi garanti par un système institué de remplaçants tournants et par une injonction à l'anticipation, une absence non gérée contraint de nombreuses familles à modifier, parfois brutalement, leur fonctionnement et leur vie professionnelle. En collège, ce genre de situation entraîne souvent la surcharge des salles de permanence. En lycée, où les élèves sont davantage mis en responsabilité, ce sont surtout les longues périodes (au moins deux semaines) sans enseignant qui inquiètent les parents et l'institution. Quelles conséquences sur la poursuite d'études quand le manque d'heures s'accumule ? Les heures de remplacement ne se font pas toujours dans de bonnes conditions (élèves peu dispos à suivre des cours imposés, progression pédagogique souvent à court terme) et certains enseignants ont surtout le sentiment de faire du gardiennage. Plusieurs ministres de l'éducation ont tenté, avec un succès mitigé, de pallier l'absence de professeurs ; comme dans le cas du chômage, les solutions annoncées apparaissent souvent comme des promesses intenables.

Le recours plus systématique à la contractualisation ne semblant pas avoir suffi à combler les besoins en enseignants, les heures de cours non assurées sont toujours plus difficiles à diminuer. Les titulaires remplaçants étant essentiellement affectés à des missions de longue durée, la baisse de leurs effectifs et l'agrandissement de leur zone ne permet pas de recourir à leurs services pour des besoins ponctuels. Là encore, le problème récurrent du recrutement augmente la difficulté de la tâche et il n'est pas sûr que ces petites missions sporadiques vont donner une meilleure image du métier. En réfléchissant à la situation, je me suis demandé si chaque établissement, voire groupe d'établissements, ne pourrait pas disposer d'une équipe de remplaçants (cela se fait dans beaucoup de sports !!), un par matière, qui pratiqueraient la co-intervention avec les collègues de leur discipline et les remplaceraient en cas d'absence. On peut (doit ?) toujours rêver…

En tout état de cause, on peut comprendre l'inquiétude générale devant ces annulations de cours, pour des périodes plus ou moins longues. Elles ont un impact non négligeable sur les apprentissages, mais est-il aussi important que celui de la diminution par nos ministres de certains volumes d'enseignement ? Une heure de perdue en mathématiques en spécialité

Retour au sommaire

de première, quand il y en a quatre, cela représente 25 % de perte ; alors qu'avant 2010, en Première S, ce n'était que 17 %. Une heure de perdue en collège, sur 3 heures et demie représente 29 % de l'horaire hebdomadaire, contre 25 %, toujours pour quatre heures par semaine. On peut se demander si ce pacte ne manque pas d'ambition et ne tente pas une nouvelle fois de placer des mesurettes en face d'un problème majeur. Peut-être faudrait-il s'interroger sur les raisons de ce nombre d'heures non assurées.

" LE PETIT VERT " est le bulletin de la régionale **APMEP Lorraine**.

Né en 1985, il complète les publications nationales que sont le bulletin «Au fil des maths» et le BGV. Il parait quatre fois dans l'année (mars, juin, septembre et décembre).

Son but est d'une part d'**informer** les adhérents lorrains sur l'action de la Régionale et sur la "vie mathématique" locale, et d'autre part de **permettre les échanges "mathématiques"** entre les adhérents.

Il est alimenté par les contributions des uns et des autres ; chacun d'entre vous est vivement sollicité pour y écrire un article et cet article sera le bienvenu : les propositions sont à envoyer à redactionpetivert@apmeplorraine.fr.

Le Comité de rédaction est composé de Geneviève Bouvart, Fathi Drissi, François Drouin, Françoise Jean, Christelle Kunc, Laetitia Ludwigs, Léa Magnier, Aude Picaut, Michel Ruiba, Jacques Verdier et Gilles Waehren.

La couverture du Petit Vert n° 154 est réalisée par Léa Magnier.

Retour au sommaire

LA JOURNÉE RÉGIONALE 2023 DE L'APMEP LORRAINE

La pluie généreuse n'a pas fait peur aux 150 participants à la journée régionale 2023. Dès 9 heures, ils étaient présents dans l'amphi pour échanger avec David Bessis. Ce n'était pas une conférence traditionnelle avec un exposé préalable, les échanges avec le public étaient privilégiés. Et les témoignages et questions furent nombreux, chacun s'identifiant aux problèmes posés et s'interrogeant sur les causes des difficultés d'apprentissage.

L'heure de la pause fut la bienvenue mais le plaisir de se retrouver ne fut pas moindre.

Bilan et perspective de l'association furent présentés par notre président Gilles Waehren et adoptés à l'unanimité : outre la journée régionale préparée de main de maître par Valérie et Christelle, les animations par les membres de l'APMEP Lorraine dans les classes sont

Retour au sommaire

nombreuses dans toute l'académie, tout au long de l'année. Les nuits du jeu rassemblent aussi de nombreux participants et le rallye remporte un succès croissant : plus de 100 classes de nos quatre départements ont participé cette année. Le président peut être fier de son travail et de celui des membres du comité ! Un appel aux bonnes volontés fut d'ailleurs lancé car elles sont toujours nécessaires et jamais suffisantes.

Le repas pris sur place au lycée Stanislas, à la brasserie ou à la cantine, a réjoui nos papilles. Les commissions organisées en fonction du niveau d'enseignement furent réunies en début d'après-midi. Voir les comptes rendus.

Deux plages d'ateliers se sont succédé ensuite. La participation active des professeurs présents est à noter particulièrement. Les animateurs ont su intéresser leur public et la satisfaction se lisait sur les visages.

L'art arabo-musulman au service de l'apprentissage de la notion d'angle

et de sa mesure… sans mesurer par Stéphanie Waehren.

Manipulation et raisonnement par Julien Bernat

Rendez-vous est pris pour l'année prochaine !

Retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

MATHS À LA CARTE

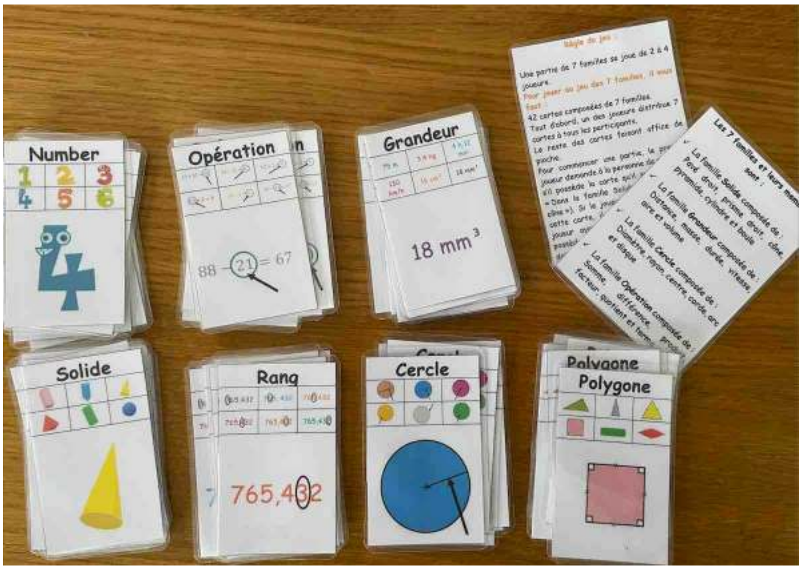
Groupe Jeux - APMEP Lorraine

Nous avions ouvert un espace sur notre site pour accueillir vos propositions. À l'origine, deux documents étaient déposés. Actuellement une douzaine de propositions vous attendent pour des utilisations depuis le cycle 2 jusqu'après le cycle 4.

Cindy Adrian (collège Paul Verlaine à Maizières-lès-Metz) et Jérémy Marmillot (collège La Source à Amnéville) ont imaginé un « jeu de 7 familles » pour leurs élèves. L'objectif de ce jeu est de réactiver le vocabulaire de plusieurs séquences de 6ème : solide, numération, grandeur, opération, polygone, cercle et Number (pour travailler un peu l'anglais).

Le jeu a été testé plusieurs fois en classe et les élèves l'ont beaucoup apprécié. Cependant, il faut les accompagner au départ pour qu'ils utilisent bien le vocabulaire mathématique, par exemple : ”dans la famille Solide, je demande le pavé droit” et non ”dans la famille Solide, je demande le solide rose”.

Le principe de ce jeu est adaptable à de nombreuses autres notions. La règle du jeu et les cartes sont téléchargeables à partir de notre site.



L'espace continuera à s'enrichir de vos propositions. N'hésitez pas à nous les faire parvenir.

Retour au sommaire

Cette année, une chasse au trésor, à destination d'élèves du cycle 3, a été préparée par les étudiants de Master MEEF de l'Université de Metz. Le Petit Vert n°153 l'avait annoncée, les documents du jeu ont été finalisés après sa parution, ils sont maintenant accessibles pour des utilisations en dehors de cette semaine des mathématiques.
Bonne chasse au trésor.

« C'était un homme sérieux, il passait son temps à jouer. »

Lewis Caroll

Retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

LE NOUVEAU COMITÉ
DE LA RÉGIONALE DE LORRAINE

Lors de l'Assemblée Générale, puis lors de la réunion du Comité du 12 avril 2023, le nouveau Comité et le nouveau bureau dela Régionale de Lorraine, pour l'année 2023-2024 ont élé élus.

Bureau

Président d'honneur : Jacques VERDIER
Président : Sébastien DANIEL
Vice-présidente : Stéphanie WAEHREN
Trésorière : Ghislaine BURKI
Trésorier adjoint : Anas MTALAA
Secrétaire : Gilles WAEHREN

Assesseurs

France BERETTA, Léa MAGNIER, Aude PICAUT,
Carole RAMBAUT, Carole STAMM, Anne WALPOTT

Responsables

Directeur de la publication « Le Petit Vert » : Sébastien DANIEL
Commission Premier degré : Hélène SMOUTS
Commission Collèges : Sébastien DANIEL
Commission Lycées : Anas MTALAA
Commission Lycées professionnels : Claude NEMURAT
Commission Enseignement supérieur, Formation des maîtres : André STEF
Groupes "Jeux" et "Maths & Arts" : François DROUIN
Rallye : Pierre-Alain MULLER
Site internet : Laurent MARX
Comité de rédaction du Petit Vert : Geneviève BOUVART, Gilles WAEHREN
Journée Régionale : Christelle KUNC, Valérie PALLEZ
Rubrique « problèmes » : Philippe FÉVOTTE

Missions

Chargé de mission brochures : André STEF
Chargés de mission Exposition itinérante :
André STEF : Andre.Stef@univ-lorraine.fr
Joëlle AGAMIS : joelle.agamis@free.fr
Michel RUIBA : michel.ruiba@ecopains.net
Marie-José BALIVIERA : baliviera.marie-jose@orange.fr
Pierre-Alain MULLER : pierre-alain.muller@wanadoo.fr
Vérificateurs des comptes : Daniel VAGOST, Yannis SEMROUNI

Retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

IL Y A 25 ANS, MORTALITÉ DANS LES CHU

Clas.	Établissements	Taux de mortalité	Clas.	Établissements	Taux de mortalité
1	CHU de Limoges	1,75 %	16	CHU de Saint-Étienne	0,86 %
2	CHU de Poitiers	1,69 %	17	CHU de Besançon	0,83 %
3	CHU de Rouen	1,42 %	18	CHU d'Angers	0,81 %
4	CHU de Caen	1,26 %	19	CHU de Tours	0,79 %
5	CHU de Lille	1,24 %	20	CHU de Grenoble	0,75 %
6	CHU de Bordeaux	1,23 %	21	CHU de Nantes	0,71 %
7	CHU de Reims	1,22 %	22	CHU d'Amiens	0,60 %
8	CHU de Brest	1,19 %	23	Assistance publique Hôpitaux de Paris	0,57 %

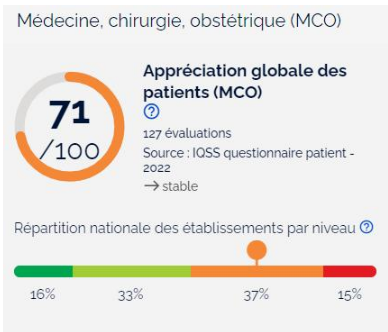
Il y a 25 ans, le Petit Vert n°54 présentait un article paru dans « Sciences & Avenir » en octobre 1997 sur les taux de mortalité dans les CHU. Il s'étonnait de la variation du taux de mortalité dans les CHU (de 1 à 22) mais surtout de la confusion « classique », entre le nombre d'hospitalisés décédés et le taux de mortalité.

Les statistiques ont fait depuis une large entrée dans les programmes de mathématiques à l'école et les problèmes de santé publique sont toujours importants et d'actualité.

Quelle est la présentation statistique de l'état du système hospitalier aux usagers en France actuellement ?

Ce n'est sans doute pas l'article du Petit Vert qui a réveillé les consciences mais on peut observer depuis 1997 que les études ont été nombreuses pour définir de façon plus efficace le taux de mortalité afin qu'il devienne un indicateur pertinent pour les établissements hospitaliers et dans un deuxième temps pour les patients. Les travaux pour déterminer les calculs de mortalité hospitalière ont débuté en 2009.

La **H**aute **A**utorité de **S**anté précise que mesurer la mortalité est plus complexe qu'il n'y parait et donne une méthode pour calculer ces taux de mortalité en vue d'informer sur la qualité des soins. Pour éviter des effets pervers de classement des établissements hospitaliers elle propose de calculer des taux de mortalité par pathologie ou par acte et de diffuser les données recueillies seulement aux professionnels. Les études publiées sur ce sujet montrent que les patients cherchent rarement des informations sur la publication des résultats de mortalité, qu'ils ne les comprennent pas, ou encore qu'ils n'ont pas confiance en ces informations. Si l'on ne se limite pas au taux de mortalité, en tant que patient ou citoyen, on peut s'interroger sur les services rendus par des établissements hospitaliers. Sur le site de la HAS on peut accéder à un panorama de la qualité des établissements de santé.



Il est pertinent de vouloir comparer le taux de satisfaction des patients obtenu dans un établissement donné à un ensemble de données nationales. Par contre, il est difficile de comprendre la représentation graphique sur les répartitions nationales par niveau, extraite du panorama de la HAS mentionné ci-dessus. Si vous comprenez mieux qu'il y a 25 ans éclairez-nous !

Retour au sommaire

NUIT DES JEUX MATHÉMATIQUES À STRASBOURG

Le 9 mai, le Vaisseau a accueilli la cinquième édition de la Nuit des Jeux mathématiques organisée à destination des professeurs des écoles, de collège et de lycée.

Au programme, des conférences, des ateliers et des stands tenus par diverses structures et associations.

Comme les années passées, la régionale a tenu un stand présentant les brochures de l'association et les puzzles vendus par notre régionale.

Visiteurs et visiteuses ont pu manipuler des puzzles géométriques et acquérir des carrés de MacMahon et des puzzles aux sept triangles édités par notre régionale.

Nous partagions notre stand avec la régionale d'Alsace. Ce fut l'occasion d'échanger à propos des Journées Nationales que nous organiserons avec eux.

Retour au sommaire

RALLYE MATHÉMATIQUE 2023

Pour cette dernière édition, 51 classes de troisième issues de 21 collèges de l'académie et 38 classes de 12 lycées ont concouru. La participation reste en hausse, mais n'a pas encore retrouvé son niveau de 2019.

Merci aux collègues qui ont fait passer l'épreuve et nous ont communiqué les fiches réponses de leur classe par courrier postal.

Merci aussi à notre partenaire ALEPH qui a doté les 3 premiers de chaque catégorie (3ème et 2nde) d'une équerre et/ou d'un rapporteur trigonométrique.

De plus, chaque élève classé dans les 3 premières classes recevra un «puzzle à 7 triangles» offert par l'APMEP Lorraine.

Vous pouvez retrouver les énoncés des 10 exercices, de la question subsidiaire et leurs réponses sur notre site.

PALMARÈS 2023

- **Lycée**

  1) 2nde 3 de l'Ensemble Scolaire Notre Dame Saint Joseph à Épinal (88)

  2) 2nde 7 du Lycée Loritz à Nancy (54)

  3) 2nde 14 du Lycée Loritz à Nancy (54)

- **Collège**

  1) 3ème D du Collège Val de Sarre à Grosbliederstroff (57)

  2) 3ème RM du Collège Langevin Wallon à Blainville sur l'eau (54)

  3) 3ème 3 du Collège Louis Armand à Moulins lès Metz (57)

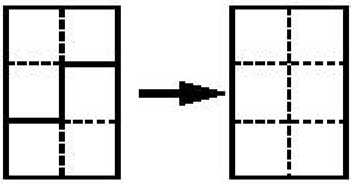
Retour au sommaire

DANS NOS CLASSES

DES «PETITS L» EN DÉBUT DE CYCLE2

François Drouin
APMEP Lorraine Groupe Jeux

L'expérimentation s'est déroulée le 13 janvier pendant une heure environ dans la classe de CP-CE1 de l'école de Sampigny. L'enseignante, Carole Hofbauer, était présente dans la classe. Un élève était aidé par son AESH et deux jeunes en service civique sont venues pendant la séance.

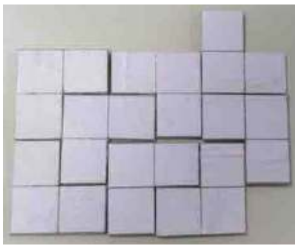


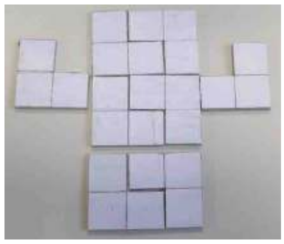
Lors de l'utilisation de « Petits L » dans une autre école, il avait été remarqué que les jeunes élèves utilisaient des assemblages de deux pièces en un rectangle pour tenter de recouvrir les surfaces proposées. L'idée a été d'utiliser des polygones pouvant être recouverts par ces regroupements de deux pièces. Des rectangles 3x2 étaient prévus comme matériel d'aide pour les élèves.

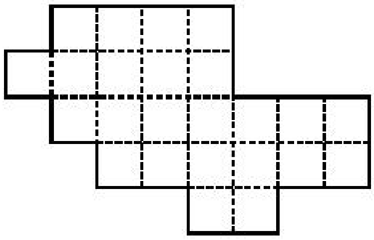
Appropriation du matériel

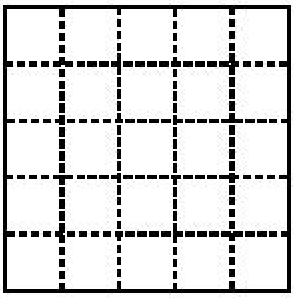
Dans un premier temps, les élèves ont utilisé huit pièces pour former l'assemblage de leur choix. Il est à noter qu'ils ne se sont jamais contentés de mettre les pièces « en ligne » l'une à côté des autres et que des assemblages comportaient des trous. Certains assemblages comportaient des pourtours symétriques, cela ne sera pas exploité pendant la suite de cette année scolaire, cette notion mathématique n'étant abordée qu'en fin de CE2. Leurs réalisations ont été prises en photos. Un document informatisé ne présentant que le pourtour à recouvrir a été renvoyé rapidement à l'enseignante, la classe a ainsi un certain nombre de défis supplémentaires pouvant être cherchés pendant des temps d'autonomie.

Retour au sommaire







Dans un second temps, les élèves devaient placer le plus possible de « petits L » dans un carré 5x5.

Ils ont constaté qu'une case restait non recouverte. Avec les élèves de CE1, nous avons réussi à mettre en évidence que les huit pièces formaient un total de 24 carrés et que le carré à recouvrir en contenait 25.

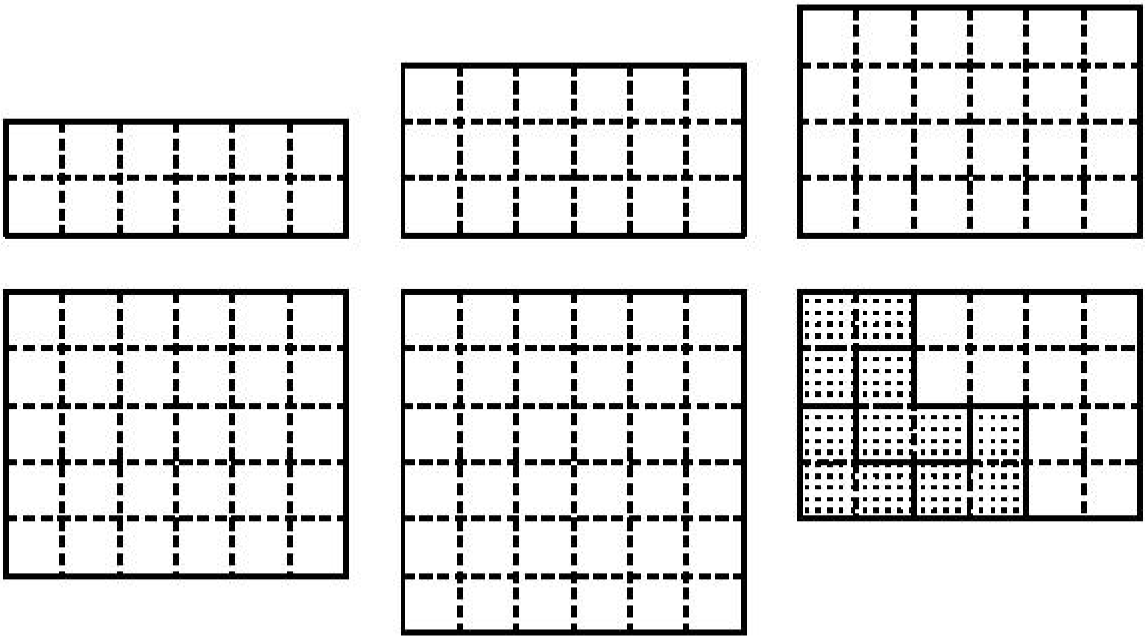


D'autres placements de la case non recouverte feront partie des recherches futures des élèves.

Recouvrements de rectangles et d'un carré

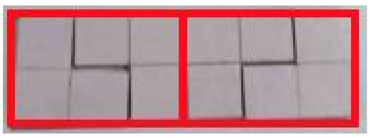
Les rectangles à recouvrir étaient de plus en plus vastes. Il a été annoncé qu'ils seraient tous recouverts sans laisser de case non recouverte. La dernière proposition fait rencontrer un recouvrement n'utilisant pas les rectangles d'aide.

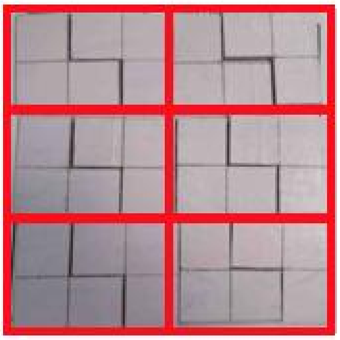
Retour au sommaire



Les élèves de CE1 ont réussi les défis proposés. Ceux de CP ont, pour certains d'eux, eu besoin de recouvrir les rectangles par les rectangles d'aide, puis de les remplacer par des « Petits L ».

Les rectangles sont petit à petit remplacés par des ensembles de deux pièces.



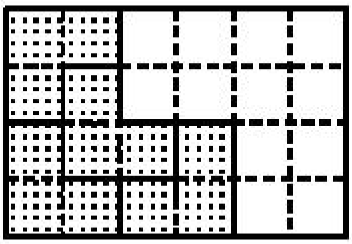


Ces recouvrements réussis sans les pièces d'aide laissent deviner les rectangles formés de deux pièces.

Remarque

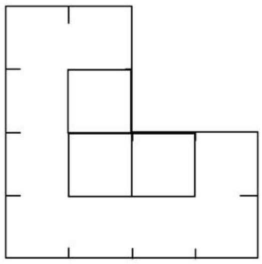
Des élèves de CE2 pourraient anticiper le nombre de pièces à utiliser.

Activités de dessins

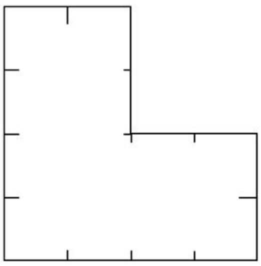


Le dessin des quatre pièces déjà dessinées dans le « Petit L » agrandi était proposé à reproduire.

Retour au sommaire

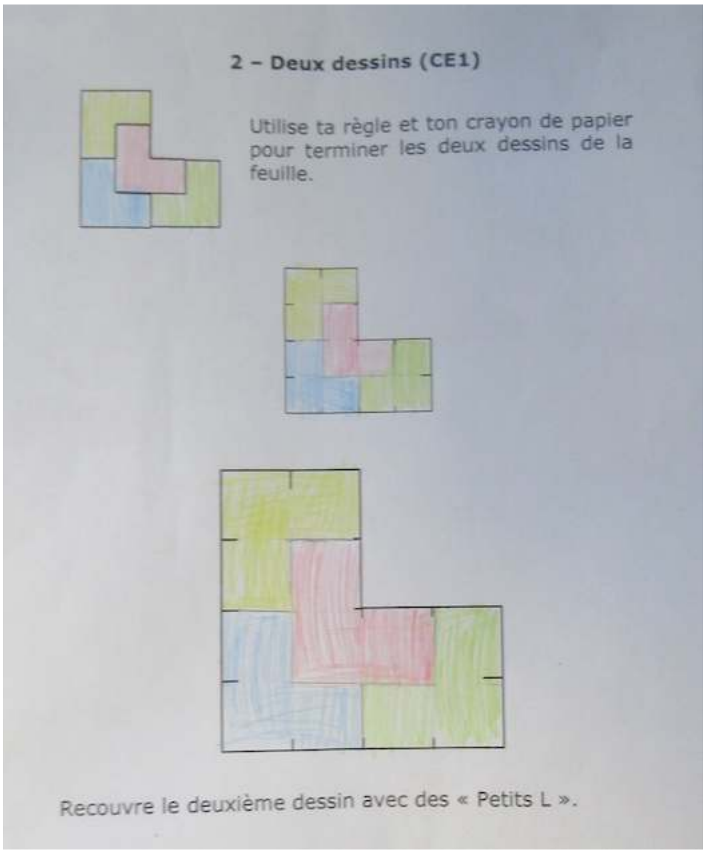


Au CP, le placement des pièces a été reproduit en traçant les lignes du quadrillage intérieur. Les pièces ont été coloriées l'une après l'autre.



Au CE1, les élèves ont tracé le quadrillage à l'intérieur du dessin puis ont effacé une partie des segments tracés pour rendre visibles les pourtours des « Petits L ».

D'autres activités de dessin se trouvent dans un document déposé sur notre site.



Conclusion confiée par l'enseignante de la classe

J'ai beaucoup apprécié l'intervention de ce matin et je compte reprendre les documents avec les élèves la semaine prochaine. Les enfants ont bien participé et ils ont été productifs. Je pense qu'on a de quoi travailler pour quelques semaines.

Les documents utilisés en classe et l'utilisation des productions des élèves sont téléchargeables.

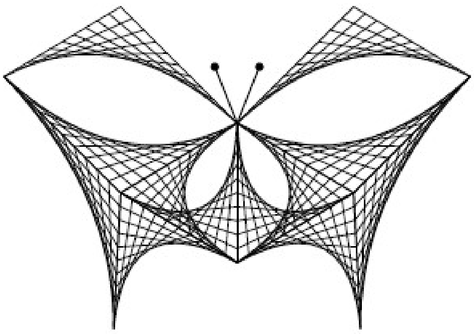
Retour au sommaire

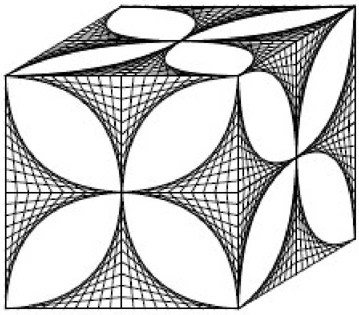
DANS NOS CLASSES

FAITES DE BEAUX DESSINS ET FAITES FAIRE DE BEAUX DESSINS

Valérian Sauton
Collège Marie Curie, Troyes

En classe de sixième, l'élève doit savoir « reconnaître, reproduire et construire des figures complexes » tout en connaissant le vocabulaire approprié. Quoi de plus motivant que de proposer de « belles figures ». J'ai construit un livret d'exercices de géométrie mettant en œuvre d'abord les notions de base comme segment, droite, demi-droite… puis proposant petit à petit des figures plus complexes comme celles-ci-dessous. Mon objectif principal est de donner aux élèves l'envie de faire des dessins afin qu'ils s'habituent à utiliser une règle, se rappellent des méthodes de construction de polygones simples (triangle équilatéral, hexagone régulier par exemple) et travaillent leurs tables de multiplication. (en graduant par exemple tous les 8 mm)





Pour faire réaliser ces dessins par les élèves, je leur montre le modèle que je souhaite obtenir et ils doivent tracer, dans un premier temps, les « bons » segments à partir des points. Ces modèles sont obtenus à l'aide de LateX et des excellents package TikZ, tkz-euclide et de quelques commandes personnalisées dont le code est très brouillon. À moyen et long terme, les élèves sont amenés à réaliser leurs propres motifs en respectant quelques consignes.

Il y a beaucoup d'échanges et d'entraide pour que la plupart puisse obtenir le motif. J'ai toujours eu des élèves qui comprennent rapidement la démarche et m'aident à expliquer à leurs camarades en difficulté.

Ces constructions, appréciées par les élèves, sont l'occasion d'introduire d'autres notions comme la perspective mais aussi de mettre en œuvre de nombreux champs mathématiques. Pour créer ces dessins de 6ème, je ne me suis inspiré que de mes souvenirs de CM1-CM2.

Mon instituteur nous faisait reproduire des figures de ce type et j'adorais ça. Les figures étaient plus simples mais devaient être analysées afin de les reproduire à l'identique. Pour

Retour au sommaire

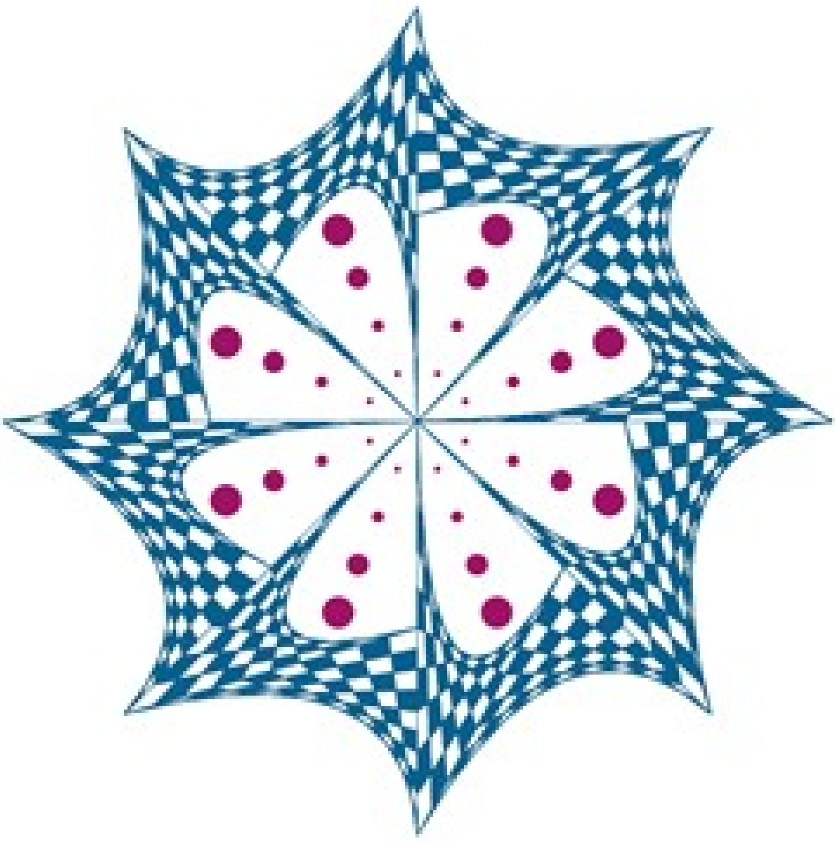
la fleur, le motif de base a été obtenu suite à une erreur de ma part dans mon code LateX. Comme j'ai trouvé le rendu très joli, j'ai continué pour obtenir l'un de mes motifs préférés.

Pour le cube j'ai même une petite anecdote. Après avoir réalisé le premier tracé "papillon", les élèves travaillaient sur un exercice avec une piscine, un bassin rectangulaire long de 25 mètres. Combien de longueurs faut-il nager pour faire 2 km ? Une élève avait essayé de faire un pavé en perspective pour représenter la situation. Son tracé manquait de précision pour être utile alors je lui en ai tracé un proprement sur son cahier. Elle me dit "Monsieur il est trop bien fait." Cette élève m'a demandé à la fin de l'heure si on allait avoir de nouvelles figures à tracer comme les fleurs. Je lui ai répondu que j'allais essayer de trouver de nouvelles figures pendant le week-end. Je me suis donc lancé à partir d'un cube en perspective pour le tracé suivant.

La rédaction du Petit Vert vous propose quelques adresses pour réaliser du Stitching, activités de fils tendus qu'on faisait naguère en centre de vacances ou à la maison. La version moderne se nomme String Art...

L'IREM de Lorraine a publié, il y a bien longtemps, un document de géométrie dans l'espace présentant le dessin non déformé sur la face avant d'un cube et vu en perspective sur les deux autres faces visibles dessinées (activité11). Le livre du maître avec les solutions est aussi en ligne.

On trouve aussi des choses semblables à l'IREM de Paris Nord, en particulier dans les activités aux pages numérotées 15, 16, 17, 18. Voici un clin d'œil vers d'autres tracés pleins de maths : des enveloppes de droites et des familles de droites.



Retour au sommaire

DANS NOS CLASSES

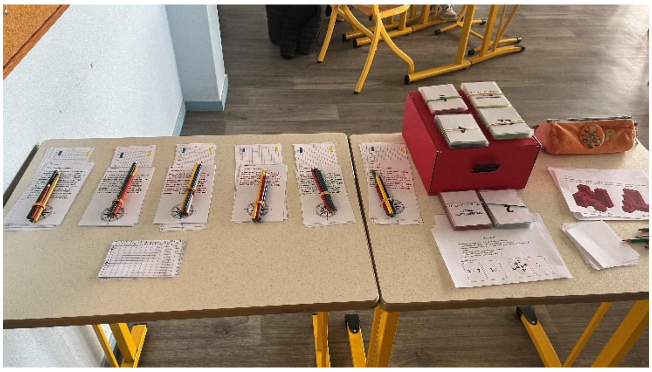
SEMAINE DES MATHS AVEC DES ÉTUDIANTS DE M1MEEF

Christelle Kunc

Le 16 Mars dernier un groupe de 12 étudiants de M1MEEF[1] messins se sont rendus au collège Louis Armand de Moulins-lès-Metz pour animer une rencontre CM2-6e dans le cadre de la semaine des mathématiques autour d'une chasse au trésor.

Cette action avait été initiée en amont par les étudiants de M2MEEF[2] pendant leur formation à l'INSPE de Lorraine au premier semestre avec l'accompagnement de leurs formatrices et des membres de l'APMEP Lorraine sur le thème : *maths à la carte*. Les documents créés ont été adaptés par les M1 et déposés à l'intention des professeurs de l'académie sur le site internet.

Le jeudi 16 mars, 13h30, nos étudiants sont dans les startingblocks. Il s'agit d'accueillir un public mixte d'écoliers de CM1-CM2 et d'élèves de 6e sur un temps relativement court, mais suffisant pour faire vivre l'aventure. Il est prévu de répartir les élèves en quatre groupes. Chaque élève doit réaliser la chasse au trésor (sur un temps de 45 min), mais aussi passer un peu de temps dans les ateliers préparés par les professeurs du collège et du labo, ainsi que des membres de l'APMEP à manipuler des objets mathématiques comme des puzzles en 2 ou 3 dimensions. Il faut prendre en compte l'heure d'arrivée des écoliers, la gestion des 6e qui les attendent, la répartition en quatre groupes, et respecter le timing. Pas si simple cette affaire !! Heureusement, pour gérer les déplacements et la répartition des élèves, les professeurs du collège et des écoles se sont concertés au préalable dans le cadre des échanges du laboratoire de mathématiques : *le moulin des maths.*
Deux chasses au trésor vont commencer au plus vite, et les deux autres suivront un peu plus tard.
Le matériel est prêt dans les quatre salles, et les étudiants sont impatients d'accueillir leurs élèves.



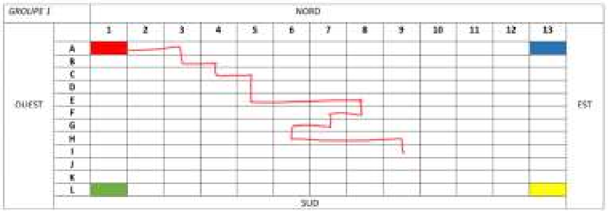
[1]Master 1 Métiers de l'Enseignement, de l'Éducation et de la Formation
[2]Master 2 Métiers de l'Enseignement, de l'Éducation et de la Formation

Retour au sommaire

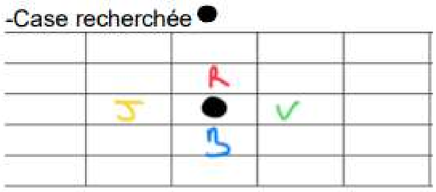
Les écoliers ne sont pas là, mais les élèves de 6e sont déjà installés. On peut commencer à faire connaissance !

Ça y est, tout le monde est là et c'est parti. Après une première présentation et mise en contexte, nos moussaillons vont pouvoir se confronter à 3 énigmes. Ils sont installés sur des ilots par groupes de 4 (idéalement deux collégiens + deux écoliers).

-Chemin

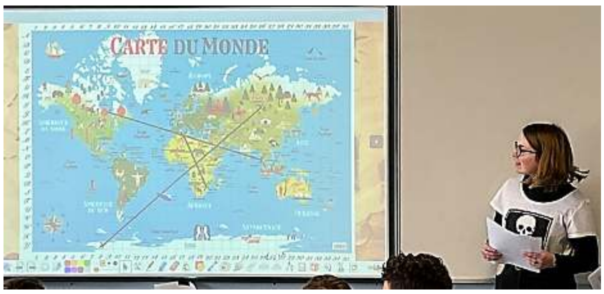


-Case recherchée



Lors de la première énigme, chaque élève doit dessiner un chemin sur sa carte en respectant les instructions données. Il s'agit ici de suivre un algorithme. Certains élèves ont plus de mal et se font aider par leurs camarades ou les professeurs. Le travail est collaboratif, il ne s'agit pas d'être plus rapide que les autres, mais de trouver ensemble. Dans chaque groupe, à l'aide des quatre réponses, une position est déterminée. En regroupant toutes les informations au tableau, il va être possible de délimiter géométriquement une zone sur la carte dans laquelle on peut trouver un pays.

L'aventure est rythmée au vidéoprojecteur grâce à un document réalisé avec genially.



Les étudiants se sont répartis à 3 dans chaque salle. Pour l'animation, la gestion du vidéo, l'aide apportée aux élèves, ce n'est pas de trop. Ils ont répété leurs rôles, se sont répartis les tâches : et oui, cela ne s'improvise pas !

Après avoir écouté un point histoire sur la bibliothèque d'Alexandrie, les élèves attaquent la 2e énigme en jouant à un jeu de mistigri. Il contient 23 cartes, dont 11 paires. La dernière carte non associée permettra de trouver un nombre. En ajoutant les quatres nombres trouvés dans la salle, l'indice suivant pourra être découvert.

Retour au sommaire

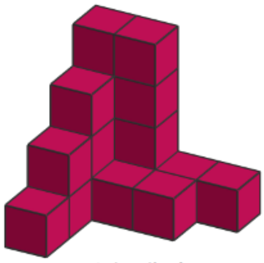
Dans une salle, une équipe incomplète a accueilli à sa table un membre de l'APMEP, papy François : le voilà bien concentré !!

Pendant ce temps, nos étudiants circulent auprès des élèves pour les aider. On rappelle la règle, on compte ensemble…

Comme pour la première, c'est de manière collaborative que la seconde énigme pourra être résolue au tableau.

Retour au sommaire

Nos étudiants n'ont pas hésité à donner de leur personne et à se mettre en scène, ce qui a été apprécié par tous les participants, élèves, professeurs et parents accompagnateurs.



Cube d'arête 4

La 3e énigme, qui nous a conduits sur de la géométrie dans l'espace, a posé plus de difficultés. Avec le soutien de tous nos élèves, et en manipulant des petits cubes, tous les groupes ont réussi à mener à bien leur aventure.

Après le départ des élèves, nous avons fait le point avec les étudiants et les professeurs de l'établissement sur le déroulement de l'activité. « Je ne pensais pas que ce serait aussi fatiguant » s'exclame un étudiant !! Et oui, rester concentré, veiller à tout, répondre aux différentes sollicitations, cela demande beaucoup de préparation et d'énergie. Nous sommes revenus ensemble aussi sur les difficultés de gestion du temps, du matériel et sur les consignes.

Nous avons également profité de ce temps d'échange pour réfléchir à la suite, dégager les points positifs et les pistes de progrès. Car l'an prochain, ce sera le tour de ces étudiants, alors en M2, de préparer la prochaine semaine des maths pour leurs futurs camarades de M1, et aussi pour les lecteurs du petit vert de l'APMEP. Quelle responsabilité !!

On retiendra ensemble l'attrait du jeu de cartes, qui permet aux enfants d'échanger entre eux et de bien collaborer. On garde en mémoire la plus-value de la manipulation des cubes pour comprendre qu'il y en avait qui restaient cachés sur le dessin. On se dit aussi que tout prévoir pour des groupes de 4, ce n'est pas une bonne idée quand on ne sait pas encore combien d'enfants on va devoir prendre en charge. Il faut pouvoir s'adapter aux besoins.

Il nous reste à attendre quel sera le nouveau thème de la semaine des maths 2024 avant de nous remettre au travail !

Retour au sommaire

VIE DES LABOMATHS

THÉORÈME DE PYTHAGORE

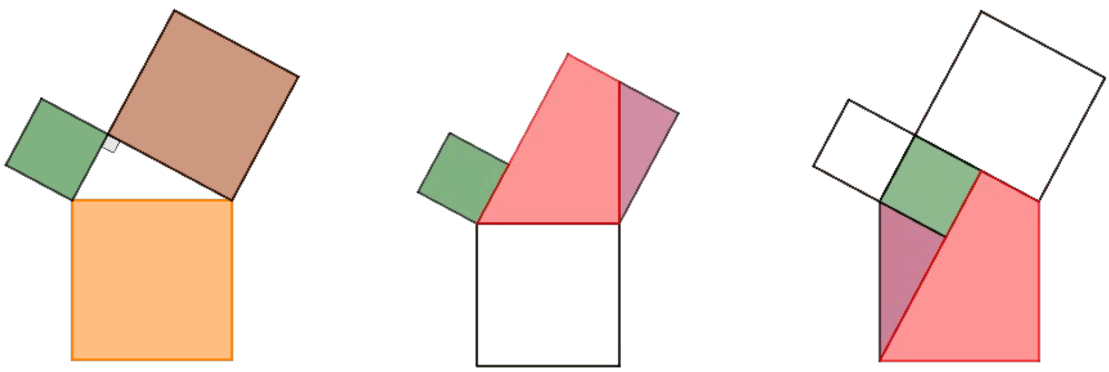
Fathi Drissi
Le Moulin des Mathématiques
Labo-maths du collège Louis Armand de Moulins-Lès-Metz

J'ai découvert les deux découpages ci-dessous, permettant de démontrer le théorème de Pythagore, dans le cadre d'une réflexion menée au sein du labo-maths de mon collège et dont le thème portait sur l'enseignement de ce théorème dans nos classes de quatrième. Ces découpages ne semblent pas avoir été signalés et ne sont pas évoqués dans les ressources suivantes :

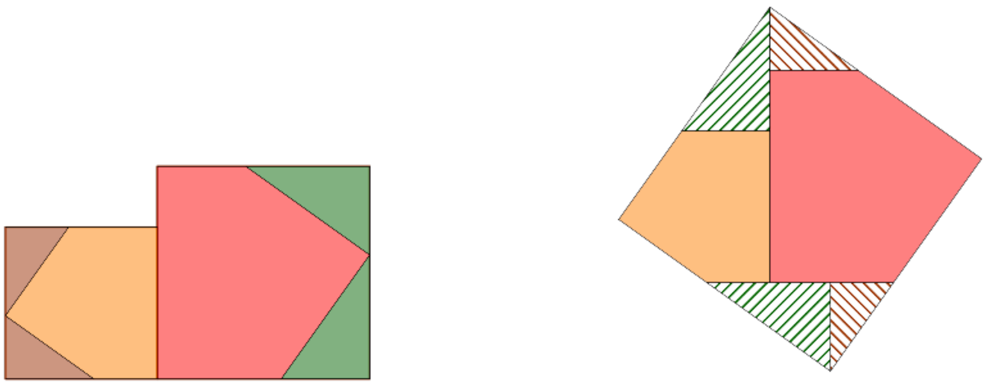
- Le livre « Curiosités géométriques » d'Émile Fourrey ;
- Le livre « The Pythagorean Proposition » d'Elisha S. Loomis ;
- Un blog présentant 122 démonstrations.

Il est surprenant de voir que l'on peut encore découvrir de nouvelles preuves pour le théorème de Pythagore étant donné qu'il est celui dont on a donné le plus de démonstrations.

1er découpage



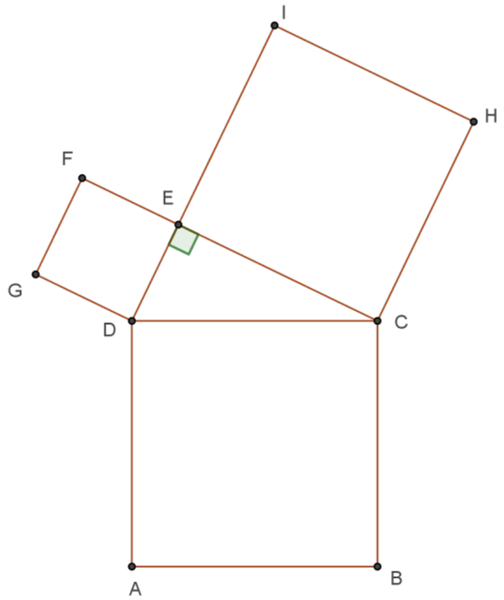
2ème découpage



Retour au sommaire

Démonstrations

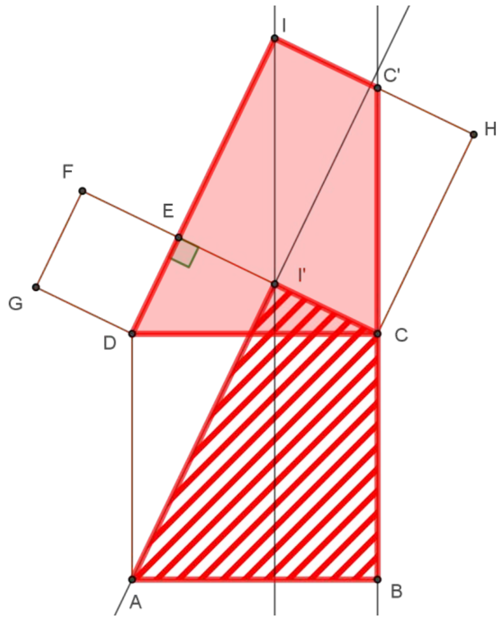
1er découpage



Soit DEC un triangle rectangle en E.

Sur chaque côté et à l'extérieur de ce triangle, on construit les carrés ABCD, DEFG et HCEI.

Démontrer le théorème de Pythagore revient à démontrer que la somme des aires des carrés DEFG et HCEI est égale à l'aire du carré ABCD.



La droite (BC) coupe (IH) en C′.

La parallèle à (BC) passant par I coupe [CE] en I′.

Démontrons que le quadrilatère BCI'A est l'image du quadrilatère CC'ID par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$:

Comme HCEI est un carré, les droites (CE) et (HI) sont parallèles.
Et par construction, (II′) et (CC′) sont parallèles.
Il en résulte que CC′II′ est un parallélogramme.
D'où : $\overrightarrow{C'C} = \overrightarrow{II'}$.

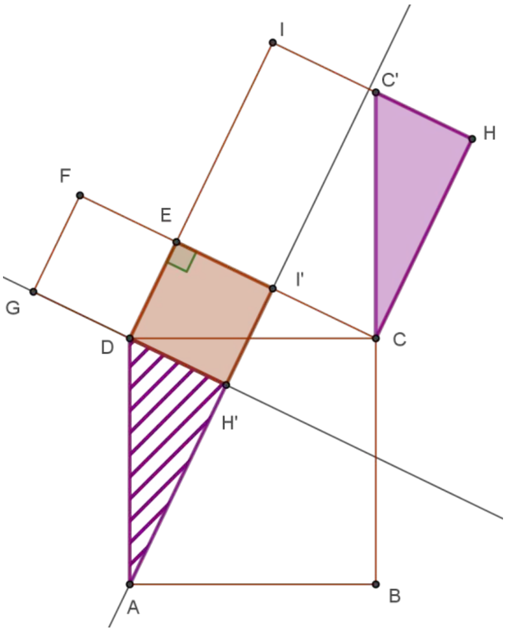
Par ailleurs, les triangles rectangles CC′H et DEC ont un côté de même longueur, CH = CE, compris entre deux angles deux à deux de même mesure : $\widehat{CHC'} = \widehat{CED}$ et $\widehat{HCC'} = \widehat{DCE}$. Donc ils sont isométriques et par suite CC′ = CD.

On a II' = CC' = CD et CD = AD, donc II' = AD.
(AD)//(BC) et (II')//(BC), donc (AD)//(II').
D'où, ADII′ est un parallélogramme et $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{II'}$.

De plus, ABCD est un carré donc $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$.
Ainsi : $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{II'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CB}$.

Et par conséquent, le quadrilatère BCI′A est l'image du quadrilatère CC′ID par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$ et donc ces quadrilatères ont la même aire.

Retour au sommaire



Soit H' le point d'intersection de (GD) et (AI').

Démontrons que les triangles ADH' et CC'H sont isométriques et que DEI'H' est un carré.

Les droites (DI) et (AI') sont parallèles et (DG) est perpendiculaire à (DI), donc (GD) est perpendiculaire à (AI').

Il s'ensuit que AH'D est rectangle en H' et puisque les angles $\widehat{ADH'}$ et $\widehat{H'DC}$ sont complémentaires, on peut déduire que les angles $\widehat{ADH'}$ et $\widehat{CDE}$ ont la même mesure.

ADH' et DEC sont donc semblables avec AD = CD.

Ainsi, ADH' et DEC sont isométriques et par suite DE = DH'.

De plus, le quadrilatère DEI'H' a ses côtés opposés parallèles et possède un angle droit, c'est donc un carré.

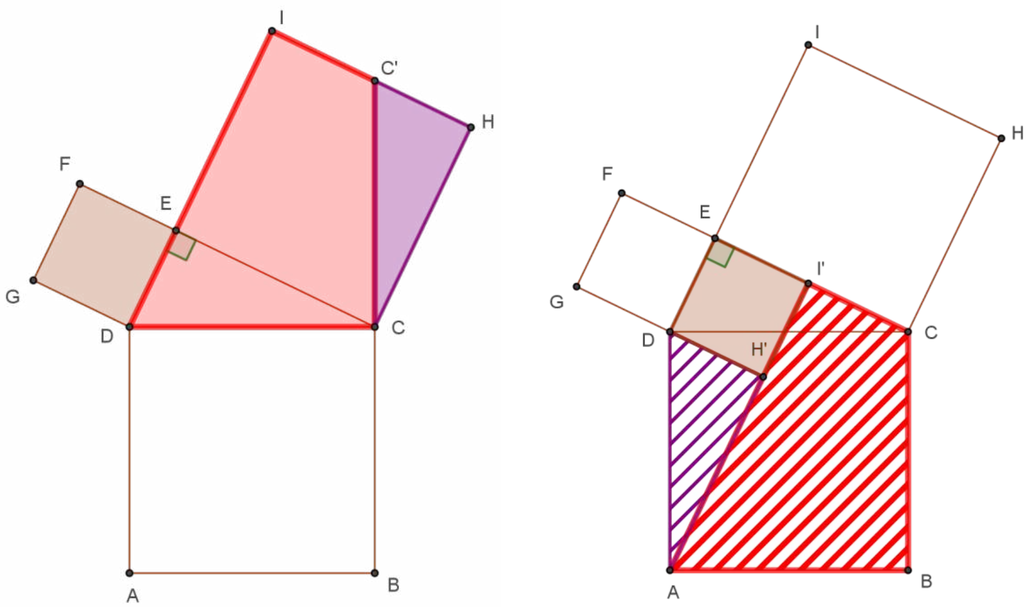
Les carrés DEFG et DEI'H' ayant le côté [DE] en commun, ils sont superposables et donc de même aire.

Les triangles ADH' et DEC sont isométriques, tout comme les triangles CC'H et DEC. Donc les triangles CC'H et ADH' sont isométriques.

De ce qui précède, nous pouvons déduire que :

$\mathit{Aire}(\mathrm{DEFG}) + \mathit{Aire}(\mathrm{DCC'I}) + \mathit{Aire}(\mathrm{CC'H}) = \mathit{Aire}(\mathrm{ABCI'}) + \mathit{Aire}(\mathrm{DH'I'E}) + \mathit{Aire}(\mathrm{ADH'})$

D'où : $\mathit{Aire}(\mathrm{DEFG}) + \mathit{Aire}(\mathrm{HCEI}) + \mathit{Aire}(\mathrm{DEC}) = \mathit{Aire}(\mathrm{ABCD}) + \mathit{Aire}(\mathrm{DEC})$



En enlevant l'aire du triangle DEC, à chaque membre de l'égalité établie ci-dessus, on obtient :

$\mathit{Aire}(\mathrm{DEFG}) + \mathit{Aire}(\mathrm{HCEI}) = \mathit{Aire}(\mathrm{ABCD})$

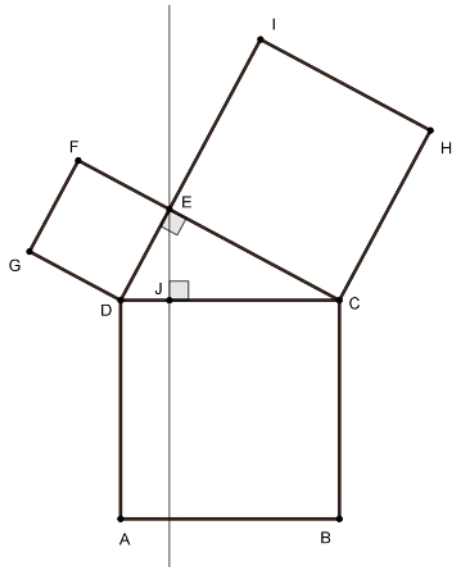
Ou encore : $\mathrm{DE}^2 + \mathrm{CE}^2 = \mathrm{DC}^2$

Retour au sommaire

Le découpage ci-dessus permet de transformer la figure composée des deux carrés DEFG et HCEI et du triangle DEC en la figure composée du carré ABCD et du triangle DEC.

Vous pouvez retrouver une animation de cette démonstration sur GeoGebra.

Démonstration sans découpage



Soit DEC un triangle rectangle en E.

Sur chaque côté et à l'extérieur de ce triangle, on construit les carrés ABCD, DEFG et HCEI.

La hauteur du triangle DEC issue de E coupe ce triangle en deux triangles, DEJ et CJE, rectangles en J.

On pose : DE = a, CE = b, CD = c, DJ = d, CJ = e et EJ = h.

Les triangles rectangles DEC, DEJ et CEJ ont leurs angles aigus deux à deux de même mesure, donc ils sont semblables.

D'où :

(E_1) : $\frac{d}{a} = \frac{h}{b} = \frac{a}{c}$ et (E_2) : $\frac{h}{a} = \frac{e}{b} = \frac{b}{c}$.

$\mathit{Aire}(DJEFG) + \mathit{Aire}(HCJEI) = \mathit{Aire}(DEFG) + \mathit{Aire}(DJE) + \mathit{Aire}(HCEI) + \mathit{Aire}(CEJ)$

$\mathit{Aire}(DJEFG) + \mathit{Aire}(HCJEI) = a^2 + \frac{dh}{2} + b^2 + \frac{eh}{2}$

Des égalités (E_1) et (E_2), on déduit que : $a^2 = cd$ et $b^2 = ce$.

$\mathit{Aire}(DJEFG) + \mathit{Aire}(HCJEI) = cd + \frac{dh}{2} + ce + \frac{eh}{2}$

$\mathit{Aire}(DJEFG) + \mathit{Aire}(HCJEI) = c(d + e) + \frac{h}{2}(d + e)$

Or, $d + e = c$

Donc, $\mathit{Aire}(DJEFG) + \mathit{Aire}(HCJEI) = c^2 + \frac{ch}{2}$

De l'égalité (E_2), on déduit que : $ab = ch$.

Et donc : $\mathit{Aire}(DJEFG) + \mathit{Aire}(HCJEI) = c^2 + \frac{ab}{2}$

Ou encore : $\mathit{Aire}(DJEFG) + \mathit{Aire}(HCJEI) = \mathit{Aire}(ABCD)$

2ème découpage

Sur la figure ci-contre, on considère un triangle CDE rectangle en E.

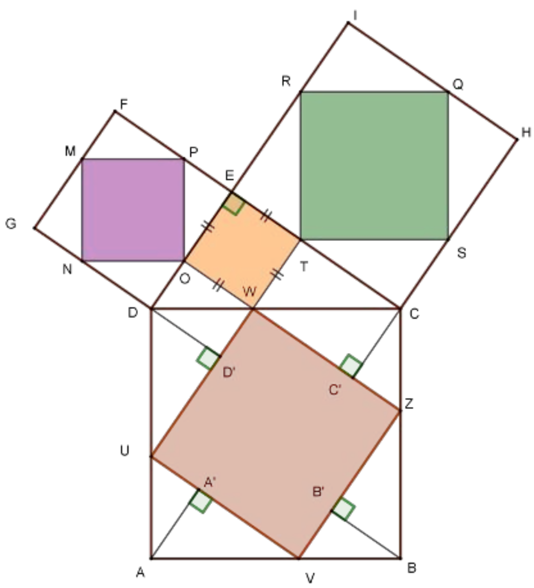
Sur chaque côté et à l'extérieur de ce triangle, on construit les carrés ABCD, DEFG et HCEI.

Démontrer le théorème de Pythagore revient à démontrer que la somme des aires des carrés DEFG et HCEI est égale à l'aire du carré ABCD.

Soit TWOE le carré inscrit dans le triangle rectangle CDE et x la longueur de son côté.

On pose :

OD = y ; CT = z ; DW = a et WC = b



Retour au sommaire

On construit les carrés MNOP inscrit dans le carré DEFG, SQRT inscrit dans le carré HCEI et UVZW inscrit dans le carré ABCD.

D'une part, les triangles rectangles DOW, DON, GNM, MFP, OPE, DD'W, CC'Z, BB'V et AA'U sont isométriques.
De même pour les triangles WTC, CST, SHQ, QIR, TER, DD'U, WCC', BB'Z et AA'V.

D'autre part, les triangles rectangles DOW, WTC et DEC sont semblables.

Il en résulte que : $\frac{y}{x} = \frac{x}{z} = \frac{a}{b}$
D'où $x^2 = yz$

La somme des aires des carrés DEFG et HCEI est donc égale à :

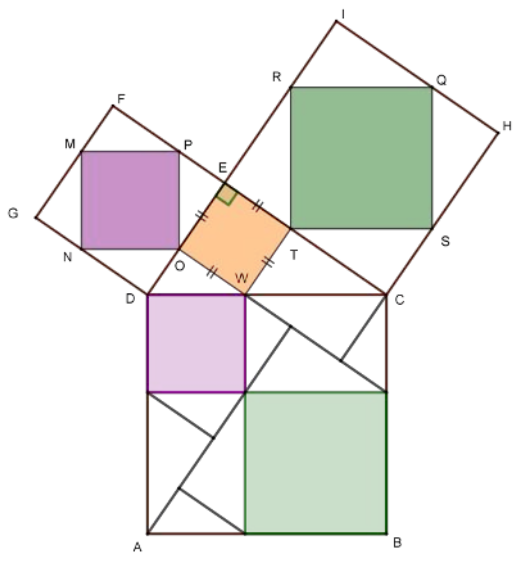
$$S_1 = (x+y)^2 + (x+z)^2$$
$$S_1 = x^2 + y^2 + 2xy + x^2 + z^2 + 2xz$$
$$S_1 = 2x^2 + y^2 + 2xy + z^2 + 2xz$$
$$S_1 = 2yz + y^2 + 2xy + z^2 + 2xz$$
$$S_1 = (y+z)^2 + 2x(y+z)$$

Et l'aire du carré ABCD est égale à la somme des aires des triangles rectangles et isométriques AUV, BVZ, CZW, DUW et du carré UVZW :

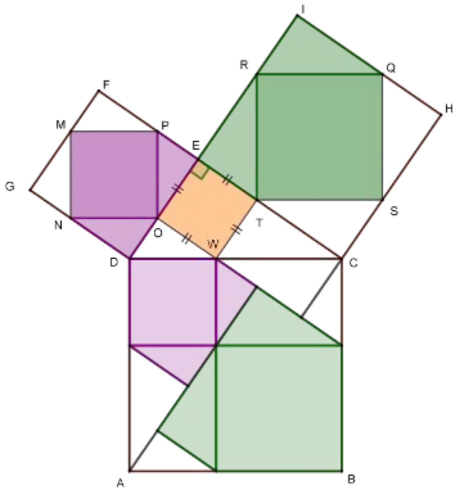
$$S_2 = (y+z)^2 + 4\frac{x(y+z)}{2}$$
$$S_2 = (y+z)^2 + 2x(y+z)$$

On constate que $S_1 = S_2$ et donc l'aire du carré ABCD est égale à la somme des aires des carrés DEFG et HCEI.

Par ailleurs, cette démonstration permet de retrouver le découpage en dix morceaux de **J. Adams** (figure ci-contre) et cité dans la collection de **Elisha Scott Loomis**, *La proposition pythagoricienne*, sous le numéro 27 en tant que preuve géométrique.

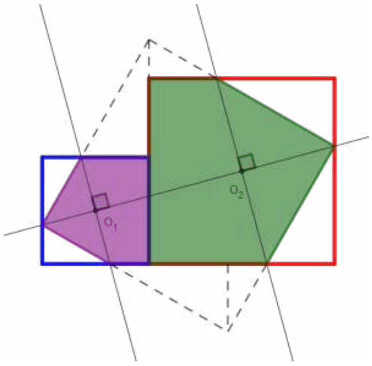


Retour au sommaire



Le nombre de morceaux de ce découpage peut être ramené à six comme le montre la figure ci-contre.

Ce nouveau découpage peut être obtenu à l'aide de la construction ci-contre et en mettant les deux carrés intermédiaires côte à côte. Les points O_1 et O_2 sont les centres respectifs de ces carrés (figure ci-contre).



On remarquera aussi que cette construction donne un découpage en douze pièces permettant de transformer les deux carrés en un carré ou en deux carrés superposables.

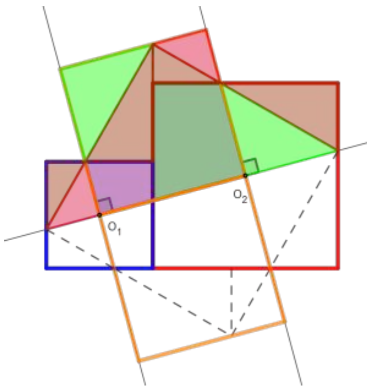
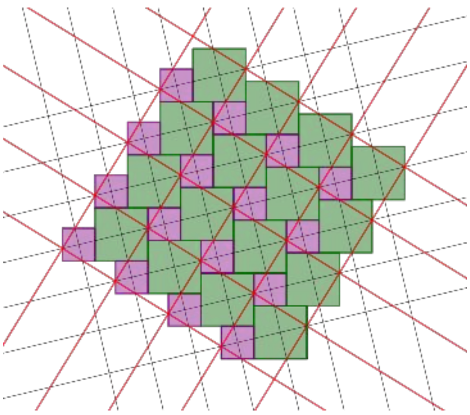


Illustration par pavage

On considère le pavage de Pythagore réalisé à l'aide de deux carrés de côtés respectifs α et β. En superposant sur ce pavage les grilles carrées de dimensions respectives γ et $\gamma\frac{\sqrt{2}}{2}$ où $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, on génère les découpages précédents.



Retour au sommaire

LA CONJECTURE D'ERDÖS-STRAUS

Fathi Drissi

Paul Erdős et Ernst Gabor Straus ont conjecturé en 1948 que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, le nombre rationnel $\frac{4}{n}$ peut être exprimé comme la somme de trois fractions unitaires, c'est-à-dire qu'il existe trois entiers naturels non nuls x, y et z tels que :

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Pour démontrer cette conjecture, on peut se limiter au cas où n est un nombre premier. En effet, s'il existe trois entiers naturels non nuls x, y et z tels que $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, alors $\frac{4}{pn} = \frac{1}{px} + \frac{1}{py} + \frac{1}{pz}$ où p est un nombre entier strictement positif.

Les nombres premiers impairs étant congrus à -1 ou 1 modulo 4, on est tenté d'étudier les deux cas séparément.
Soit n un nombre premier.
On suppose que n est congru à -1 modulo 4, alors il existe un nombre entier strictement positif k tel que $n = 4k - 1$.
Or, l'identité de Fibonacci permet de décomposer toute fraction unitaire en une somme de deux fractions égyptiennes.

Plus formellement, pour tout entier m strictement positif, on a :

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m(m+1)}$$

Donc, en appliquant cette identité à $\frac{4}{4k-1}$, on obtient :

$$\frac{4}{n} = \frac{4}{4k-1} = \frac{4}{4k} + \frac{4}{4k(4k-1)} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k(4k-1)} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{k(4k-1)}$$

On peut même obtenir une décomposition en somme de trois fractions égyptiennes en appliquant à nouveau l'identité de Fibonacci à la fraction $\frac{1}{k}$:

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k(4k-1)} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{k(4k-1)}$$

S'il a été facile de prouver la conjecture pour n premier et congru à -1 modulo 4, il n'en est rien pour le cas où n est premier et congru à 1 modulo 4.
Soit n un nombre premier congru à 1 modulo 4. Il existe alors un nombre entier strictement positif k tel que $n = 4k + 1$.

Retour au sommaire

Si k est impair, c'est-à-dire qu'il existe un entier l tel que $k = 2l + 1$, alors on a :

$$\frac{4}{4k+1} = \frac{4}{8l+5} = \frac{4}{8l+8} + \frac{4 \times 3}{(8l+8)(8l+5)} = \frac{1}{2l+2} + \frac{3}{(2l+2)(8l+5)}$$

Cette décomposition s'obtient à l'aide de l'identité suivante :

> Pour tout entier m et tout entier d strictement positifs, on a :
>
> $$\frac{1}{m} = \frac{1}{m+d} + \frac{d}{m(m+d)}$$

Ainsi,

$$\frac{4}{4k+1} = \frac{1}{2l+2} + \frac{3}{(2l+2)(8l+5)} = \frac{1}{2(l+1)} + \frac{2}{2(l+1)(8l+5)} + \frac{1}{2(l+1)(8l+5)}$$

Ou encore

$$\frac{4}{4k+1} = \frac{1}{2(l+1)} + \frac{1}{(l+1)(8l+5)} + \frac{1}{2(l+1)(8l+5)}$$

Mais si k est pair, c'est-à-dire qu'il existe un entier l tel que $k = 2l$, les démarches précédentes peuvent être encore suivies pour l congru à -1 modulo 3.

En effet, pour l congru à -1 modulo 3, n est congru à -7 modulo 24 et donc il existe un entier q strictement positif tel que $n = -7 + 24q$.

$$\frac{4}{n} = \frac{4}{-7+24q} = \frac{4}{-4+24q} + \frac{4 \times 3}{(-4+24q)(-7+24q)} = \frac{1}{6q-1} + \frac{3}{(6q-1)(24q-7)}$$

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{6q-1} + \frac{3}{(6q-1)(24q-7)} = \frac{1}{6q-1} + \frac{3}{6q(24q-7)} + \frac{3}{6q(6q-1)(24q-7)}$$

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{6q-1} + \frac{1}{2q(24q-7)} + \frac{1}{2q(6q-1)(24q-7)}$$

L'entier l ne peut être congru à 1 modulo 3, sinon n serait congru à 9 modulo 24 et donc divisible par 3 ce qui contredit l'hypothèse que n est premier.

Il reste le cas où l est divisible par 3 et donc n congru à 1 modulo 24.

Pour ce cas et en écrivant $n = 24s + 1$ avec s un entier strictement positif, on peut éliminer le cas où s est congru à 1 modulo 5, sinon n serait congru à 25 modulo 120 qui est en contradiction avec n premier.

Il reste les cas où s est congru à 0 ; 2 ; 3 ou 4 modulo 5 ou encore n congru à 1 ; 49 ; 73 ou 97 modulo 120. On bloquera à nouveau devant le cas où n est congru à 1 modulo 120 et, en poursuivant ainsi, on va d'une impasse à une autre. Cela est dû au fait qu'il n'existe pas de solution générale par une formule polynomiale, un résultat démontré par le mathématicien polonais A. Schinzel.

Par ailleurs, Louis J. Mordell a pu démontrer en 1969 que la conjecture est vérifiée sauf pour les nombres premiers congrus à 1 ; 11^2 ; 13^2 ; 17^2 ; 19^2 et 23^2 modulo 840.

Nous remarquons toutefois qu'il est aisé de trouver une formule polynomiale pour les classes de nombres $n + 1$, $n + 4$, $4n + 1$ et $n^2 + 4$ ayant un diviseur de la forme $4p - 1$ et où n est un nombre premier congru à 1 modulo 4.

Retour au sommaire

Proposition 1

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 3.

Si $n+1$ possède un diviseur congru à –1 modulo 4, alors le nombre rationnel $\frac{4}{n}$ peut être exprimé comme la somme de trois fractions égyptiennes.

Preuve

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 3.

Supposons que $n+1$ possède un diviseur de la forme $4p-1$ avec p entier strictement positif.

Il existe alors un entier q strictement positif tel que $n+1=q(4p-1)$.

$$\frac{4}{n}=\frac{4p}{pn}=\frac{4p-1}{pn}+\frac{1}{pn}$$

En appliquant l'identité de Fibonacci, on obtient :

$$\frac{4}{n}=\frac{4p-1}{p(n+1)}+\frac{4p-1}{pn(n+1)}+\frac{1}{pn}$$

$$\frac{4}{n}=\frac{4p-1}{pq(4p-1)}+\frac{4p-1}{pqn(4p-1)}+\frac{1}{pn}$$

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{pq}+\frac{1}{pqn}+\frac{1}{pn}$$

Proposition 2

Soit n un nombre premier et congru à 1 modulo 4.

Si dans la décomposition en produit de facteurs premiers de $4n+1$ il y au moins un facteur congru à –1 modulo 4, alors le nombre rationnel $\frac{4}{n}$ peut être exprimé comme la somme de trois fractions égyptiennes.

Preuve

Soit n un nombre premier et congru à 1 modulo 4.

Supposons que $4n+1$ possède un diviseur de la forme $4p-1$ avec p entier strictement positif.

Or, n est congru à 1 modulo 4.

Donc, $4n+1$ est congru à 1 modulo 4 et il existe un entier q strictement positif tel que $4n+1=(4q-1)(4p-1)$.

On a :

$$4n+1=(4q-1)(4p-1)$$

$$\Leftrightarrow 4n+1=16pq-4p-4q+1$$

$$\Leftrightarrow n=4pq-p-q$$

D'où :

$$\frac{4}{n}=\frac{4pq}{pqn}=\frac{4pq-p-q}{pqn}+\frac{1}{pn}+\frac{1}{qn}$$

Ou encore :

Retour au sommaire

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{pq} + \frac{1}{pn} + \frac{1}{qn}$$

Proposition 3

Soit un nombre premier et congru à 1 modulo 4.

Si dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n^2+4, il y au moins un facteur congru à -1 modulo 4, alors le nombre rationnel $\frac{4}{n}$ peut être exprimé comme la somme de trois fractions égyptiennes.

Preuve

Soit n un nombre premier et congru à 1 modulo 4.

On peut donc écrire $n = 4k+1$ où k est un entier strictement positif.

Supposons que dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n^2+4, il y ait un facteur premier de la forme $4p-1$ avec p entier strictement positif.

Alors son exposant est pair en vertu du théorème des deux carrés, puisque n^2+4 est la somme de deux carrés.

Théorème des deux carrés

Un entier naturel n est somme de deux carrés parfaits si et seulement si, dans la décomposition en facteurs premiers de n, tous les facteurs premiers de la forme $4p-1$ ont des exposants pairs.

Il existe donc deux entiers a et b strictement positifs tels que : $n^2+4 = (4a-1)(4b-1)$

On pose $x = a+k$ et $y = b+k$.

On a : $n^2+4 = (4x-4k-1)(4y-4k-1) = (4x-n)(4y-n)$

$$n^2+4 = 16xy - 4xn - 4yn + n^2$$

$$1 = 4xy - xn - yn$$

$$xn + 1 = y(4x-n)$$

Ainsi, $4x-n$ divise $xn+1$

$$\frac{4}{n} - \frac{1}{x} = \frac{4x-n}{xn} = \frac{4x-n}{xn+1} + \frac{4x-n}{xn(xn+1)} = \frac{4x-n}{y(4x-n)} + \frac{4x-n}{xyn(4x-n)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{xyn}$$

D'où

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xyn}$$

Proposition 4

Soit n un nombre premier et congru à 1 modulo 4.

Si dans la décomposition en produit de facteurs premiers de $n+4$ il y au moins un facteur congru à -1 modulo 4, alors le nombre rationnel $\frac{4}{n}$ peut être exprimé comme la somme de trois fractions égyptiennes.

Preuve

Retour au sommaire

Soit n un nombre premier et congru à 1 modulo 4.

Supposons que $n+4$ possède un diviseur de la forme $4p-1$ avec p entier strictement positif.

n est congru à 1 modulo 4. Alors il existe k tel que $n=4k+1$

Donc, $n+4$ est congru à 1 modulo 4 et il existe un entier q strictement positif tel que $n+4=(4q-1)(4p-1)$.

On a :

$$\Leftrightarrow n+4=(4q-1)(4p-1)$$

$$\Leftrightarrow n+4=16pq-4p-4q+1$$

$$\Leftrightarrow 4k+4=16pq-4p-4q$$

$$\Leftrightarrow k+1=4pq-p-q$$

$$\Leftrightarrow k+p+1=q(4p-1)$$

Et :

$$\frac{4}{n}-\frac{1}{k+p}=\frac{4k+4p-n}{n(k+p)}=\frac{4p-1}{n(k+p)}$$

En appliquant l'identité de Fibonacci, on obtient :

$$\frac{4}{n}-\frac{1}{k+p}=\frac{4p-1}{n(k+p+1)}+\frac{4p-1}{n(k+p)(k+p+1)}$$

Il en résulte que :

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+p}+\frac{4p-1}{qn(4p-1)}+\frac{4p-1}{qn(4p-1)(k+p)}$$

Ou encore :

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+p}+\frac{1}{qn}+\frac{1}{qn(k+p)}$$

Retour au sommaire

VU SUR LA TOILE

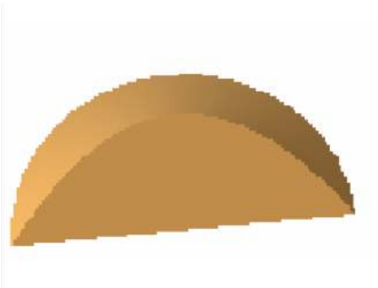
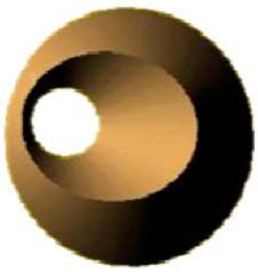
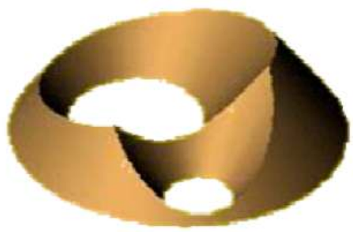
SABLE OU PAS SABLE ?

Gilles Waehren

Le sable et les mathématiques entretiennent une relation historique. L'Arénaire d'Archimède (3ème siècle avant notre ère) est l'un des premiers traités à nous rappeler Remacle. Un texte dont les premières lignes méritent d'être exploitées en cycle 4 en suivant ce document ou sous cette forme. Le savant sicilien a utilisé le sable pour y écrire ses recherches, effacer ses erreurs (!!), puis y verser son sang. Les Grecs de l'Antiquité ont trouvé avec le sable une première modélisation de l'atome.

Plaisir des étés balnéaires, l'immense quantité des grains de sable n'est pourtant pas une ressource inépuisable. Cet article de «consoglobe» est là pour nous sensibiliser à sa consommation titanesque, qui n'est pas sans conséquence sur de nombreux écosystèmes, sur notre paysage ; on peut y trouver des données numériques à exploiter et à illustrer en classe.

Francis Jamm, enseignant à Mulhouse, a partagé dans les Journées de l'APMEP (nationales et régionales) ses découvertes sur la géométrie des tas de sables, dans cet atelier à Caen ou dans la revue «Repère».

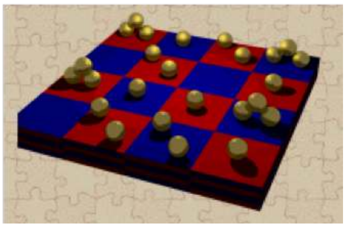
Ces considérations avaient déjà intéressé Robert March lors des JN 2001 à Lille. C'est, en tout cas un thème riche d'activités avec les élèves, comme le montre ce compte-rendu d'atelier «MATh.en.JeanS.» : ; ainsi que cet article de PLOT.

La construction des tas de sable ne peut pas se réussir sans un minimum de lois physiques, comme c'est expliqué dans cette vidéo de Science Étonnante.

Un peu d'eau est nécessaire pour faire tenir un château de sable, mais le sable n'est pas un liquide comme on peut l'apprendre dans cette conférence mise à disposition par la SMF. Le site «amaco»: propose des ressources iconographiques de qualité sur la physique des tas de sable et, bien sûr, celle de ses châteaux.

Pour les amateurs de calcul, l'école des Mines d'Albi partage un cours de Science et Technologie des Poudres.

Retour au sommaire



De manière plus inattendue, le tas de sable est également le nom d'un jeu, expliqué dans cet énoncé de projet (pour les étudiants en informatique) et qui repose sur un automate cellulaire théorisé dans ce cours de Polytechnique et qu'on peut tester en ligne. Un autre jeu avec des tas de sable permettrait de faire apparaître le nombre d'or en étudiant les positions gagnantes et perdantes.

Enfin le site de l'académie de Nouméa nous permet de découvrir les «sandroing», des dessins sur le sable, tradition ancestrale du Vanuatu et classés patrimoine intangible de l'UNESCO. L'article reprend une publication de Vandendriessche et Da Silva diffusée sur ethnographiques.org, qui, en plus de présenter cette pratique dans son contexte donne les algorithmes de construction. L'ensemble forme un dossier d'une richesse considérable.

Fig. 23c et d. Reprise de l' « algorithme de la tortue »

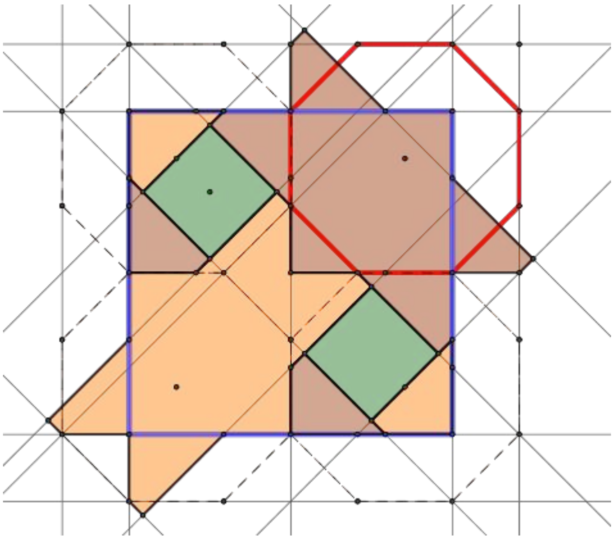
gilles.waehren@wanadoo.fr

Retour au sommaire

À L'ALHAMBRA

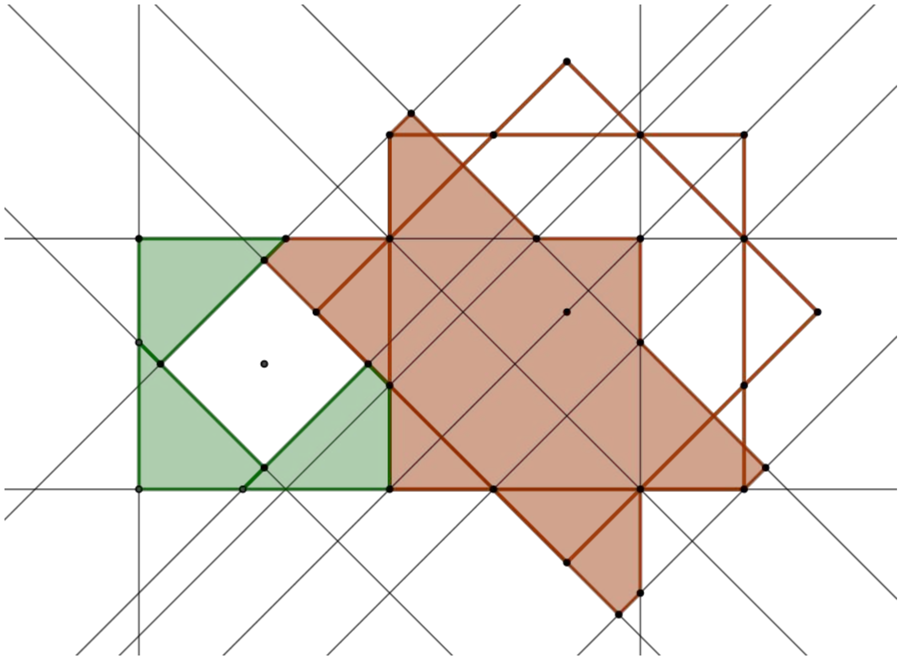
Groupe Maths et Arts - APMEP Lorraine

Fin 2022, une de nos adhérentes avait fabriqué sa carte de vœux illustrée de décors géométriques repérés pendant l'été à l'Alhambra.
Celui-ci a attiré notre regard : nous avons eu envie de le redessiner et donc de comprendre quel pourrait en être la cellule génératrice.



Le motif semble être construit à partir d'un pavage réalisé à l'aide d'octogones réguliers et de carrés.
Le motif délimité par le carré bleu pourra être choisi comme cellule génératrice du pavage.

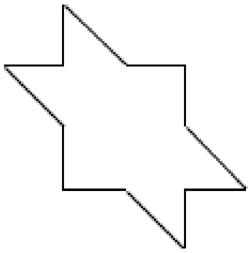
Retour au sommaire



Le motif peut être aussi obtenu à partir d'une étoile à huit branches. Le polygone brun est un motif zellige.

Pour des tracés avec de jeunes élèves

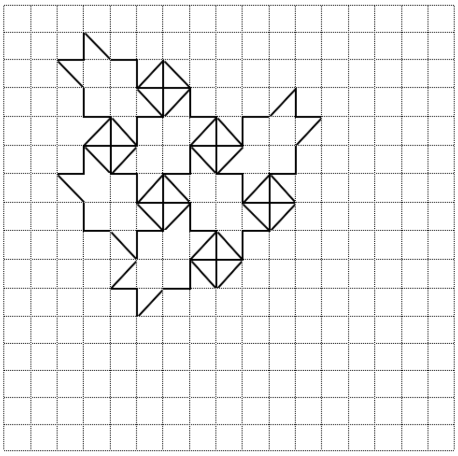
Dans les deux cas, le motif à compléter est **inspiré** du décor analysé pages précédentes.



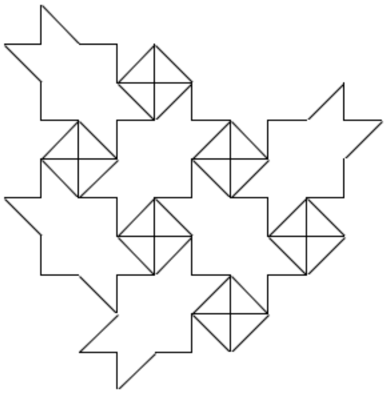
Contrairement à ce qui a été fait par les concepteurs des zelliges repérés à l'Alhambra, un quadrillage a été utilisé comme pour fournir des activités de tracé géométrique à des élèves dès le début du cycle 3.

Le dessin du motif zellige brun évoqué précédemment s'en trouve modifié.

Dans tous les cas, un coloriage rendra les dessins des élèves encore plus esthétiques.



En utilisant le quadrillage



En utilisant la règle non graduée

Des documents à utiliser en classe sont accessibles sur notre site.

Retour au sommaire

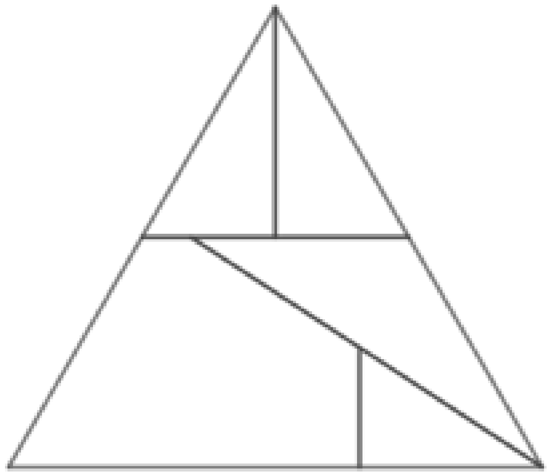
LE PUZZLE DU RALLYE 2023

Groupe Jeux - APMEP Lorraine

Voici le défi proposé aux élèves de troisième et de seconde participant au rallye 2023 organisé par notre régionale.

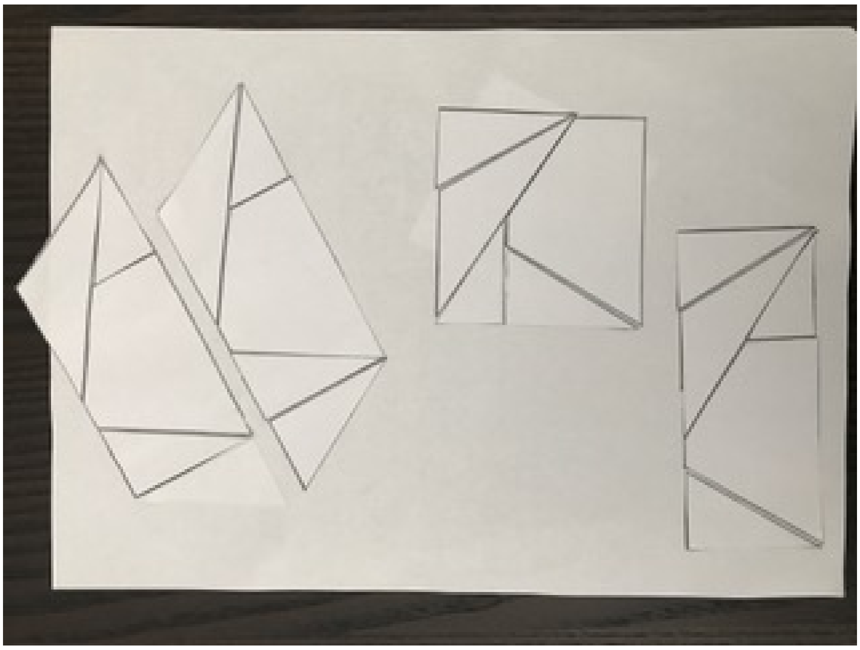
Question subsidiaire : De 3 à 4 côtés

Le triangle ci-dessous est découpé en 5 parties.



Découpe les 5 pièces et assemble-les pour obtenir un quadrilatère, puis essaie de constituer le plus grand nombre possible de quadrilatères différents.

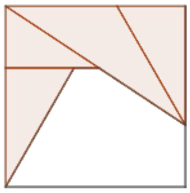
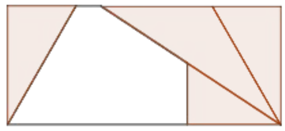
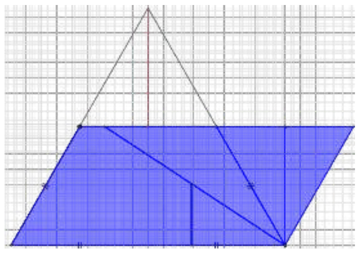
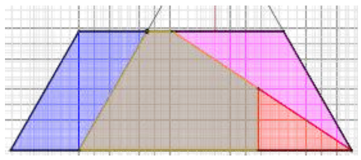
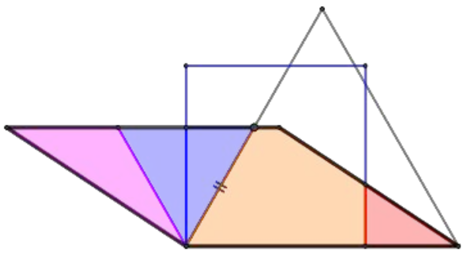
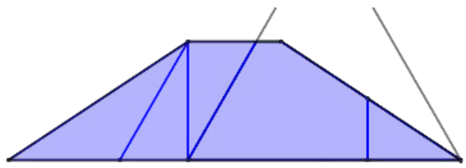
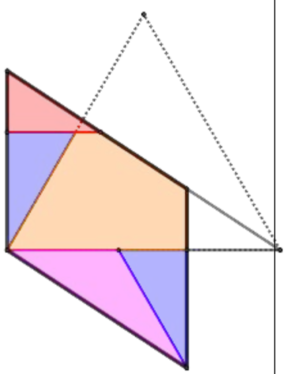
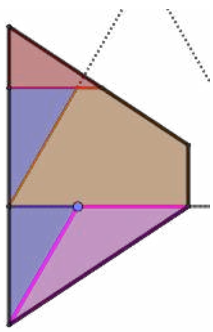
La classe ayant trouvé le plus de quadrilatères est une classe de troisième : voici une photo de ses propositions.



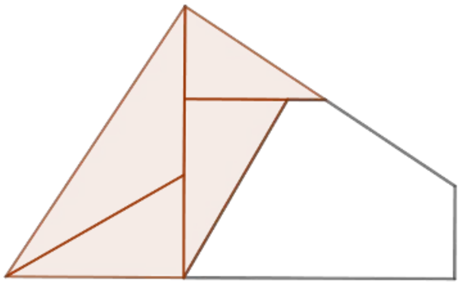
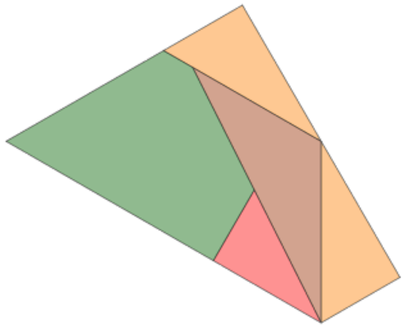
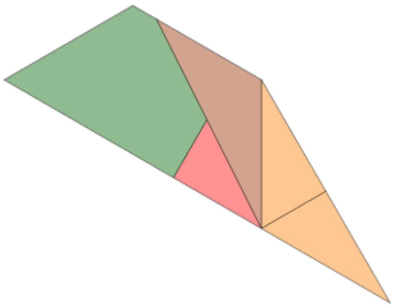
Avoir trouvé trois types de quadrilatères différents ne semble pas avoir incité à rechercher d'autres parallélogrammes ou d'autres trapèzes.

Retour au sommaire

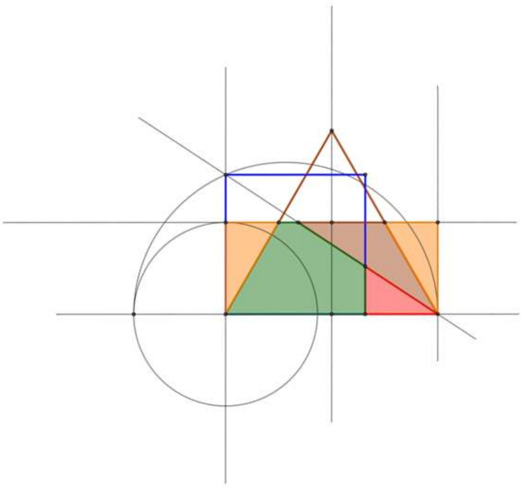
Le groupe qui a préparé les exercices du rallye a de son côté trouvé 11 quadrilatères différents.

Carré 	Rectangle 
Parallélogramme 1 	Trapèze isocèle 1 
Parallélogramme 2 	Trapèze isocèle 2 
Parallélogramme 3 	Trapèze isocèle 3 

Retour au sommaire

Quadrilatère avec 2 angles droits	Trapèze rectangle
	
Trapèze	
	

Voici comment le découpage a été conçu.



Le triangle équilatéral est découpé pour être transformé en un rectangle.

Le rectangle est transformé en un carré en utilisant la méthode de quadrature du rectangle imaginée par Euclide.

Retour au sommaire

RALLYE 2023 – COUPE AU CARRÉ

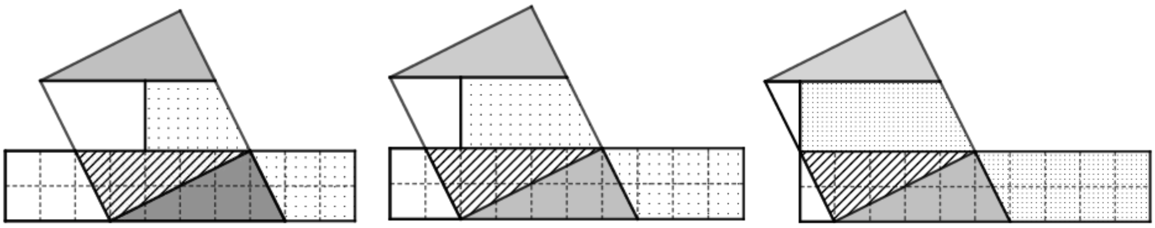
Groupe Jeux - APMEP Lorraine

L'exercice 4 aurait pu s'appeler « quadrature d'un rectangle ». Il était proposé aux élèves de troisième et de seconde participant au rallye 2023 organisé par notre régionale et ils ont été plutôt en difficulté au vu des moyennes à cet exercice (0,520/4 en collège et 0,703/4 en lycée).

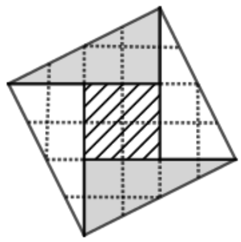
Exercice 4 : Coupe au carré

Découpe le rectangle ci-dessous et reconstitue un carré avec tous les morceaux, sans qu'ils se chevauchent.

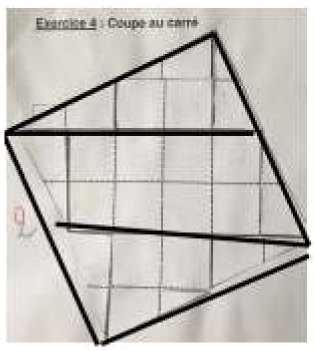
- 3 classes de collèges différents ont proposé une solution en 4 parties, aucune classe de seconde.



- 5 classes de troisième et 8 classes de seconde ont proposé une solution en 5 parties .



- 4 classes de seconde ont proposé une solution en plus de 5 parties.



- une classe a proposé un découpage en 11 parties.

Retour au sommaire

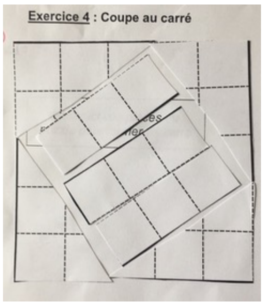
- 30 classes sur les 87 ayant participé ont proposé cette réponse.

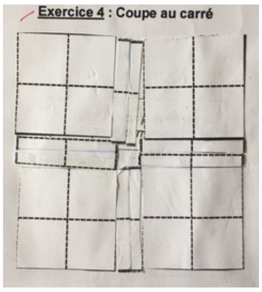
  Le rectangle a été découpé en 4 bandes de 5 carreaux pour former un carré … évidé en son centre qui ne peut donc pas être considéré comme un carré.
  Un carré a été visualisé par un trait très épais. Pour ces élèves, qu'est-ce qu'un carré ? Le pourtour ? L'intérieur ? Ce n'est pas encore un objet mathématique riche en propriétés.

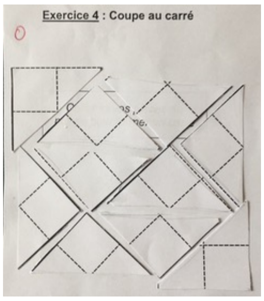
Remarques

L'aire du rectangle à découper est égale à 20. La recherche du côté du carré à obtenir amène à retrouver $\sqrt{20}$ en utilisant le quadrillage visible ou en cherchant une somme de deux carrés d'entiers naturels égale à 20 : $2^2 + 4^2 = 20$

Des élèves n'ont pas imaginé que le côté du carré reconstruit puisse ne pas respecter les directions des côtés du rectangle initial.

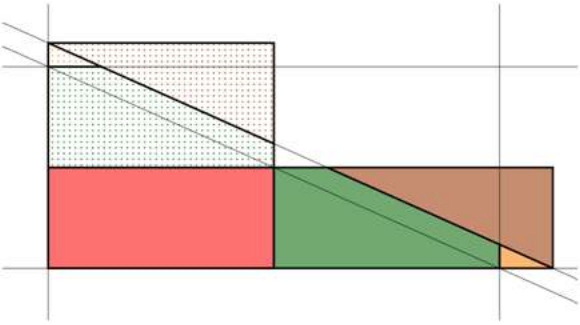




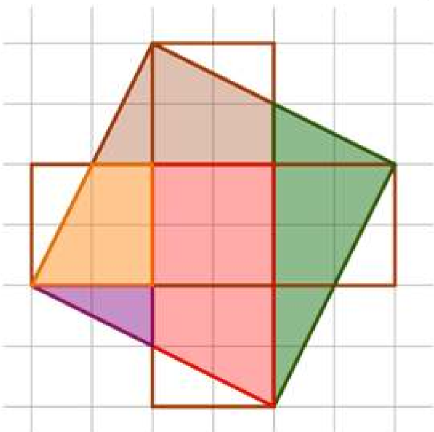


Pour aller plus loin

Voici d'autres découpages envisagés pendant la période de création des énoncés.

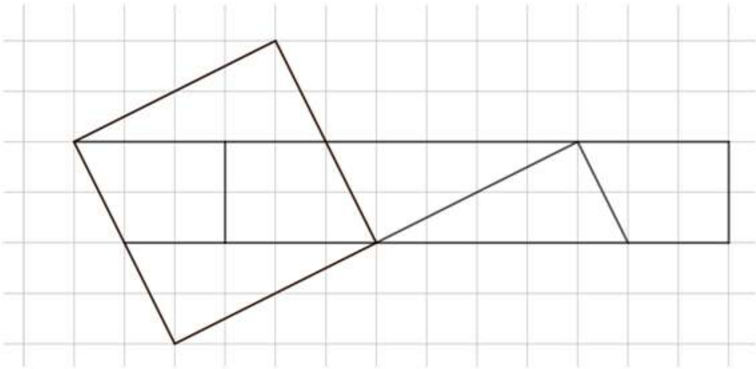


Voici une solution en 4 morceaux. Elle utilise la méthode d'Euclide pour transformer un rectangle en un carré.

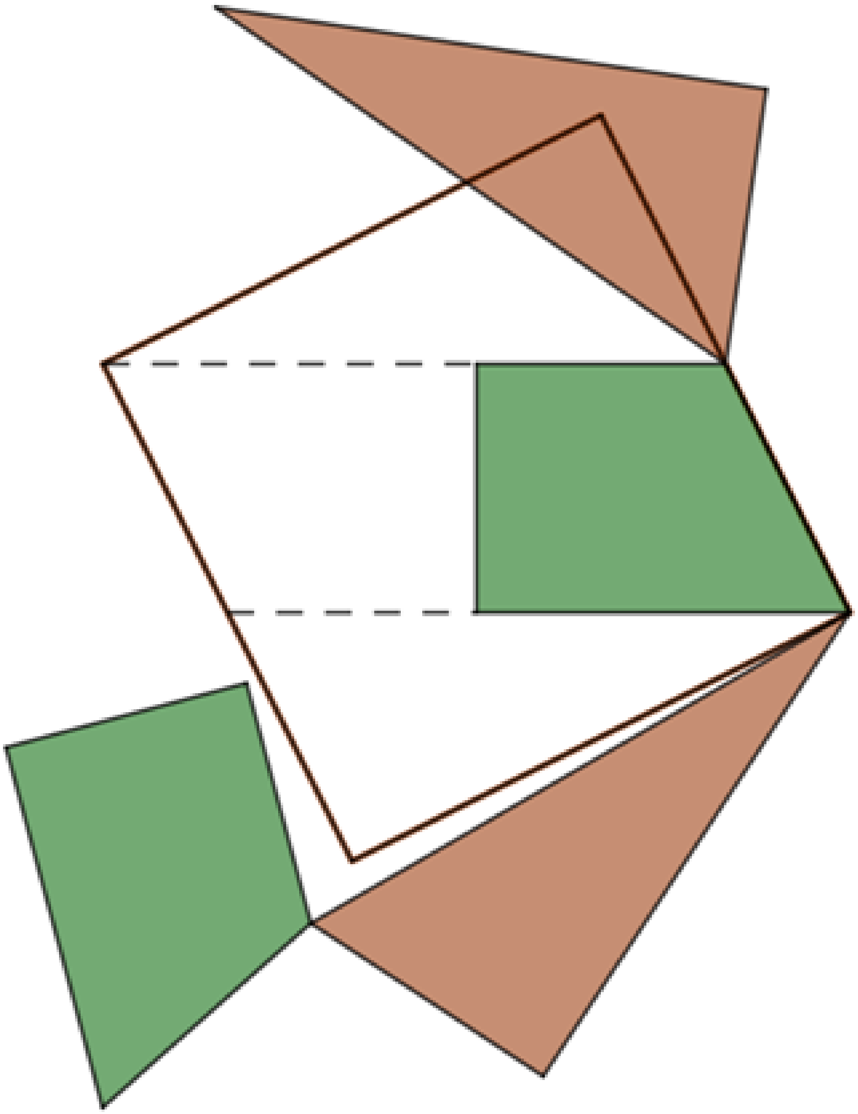


En voici une autre utilisant la pentasection d'un carré. Mais cette disposition ne permet pas d'avoir le minimum de morceaux.

Retour au sommaire



Voici une intéressante optimisation : quatre morceaux de même aire et un centre de symétrie. De plus, les pièces peuvent être articulées.



Retour au sommaire

AVEC LES PIÈCES DE MONDRIAN BLOCKS

Groupe Jeux - APMEP Lorraine

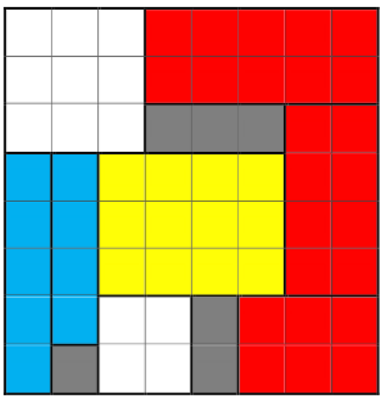
Sur la boite, le jeu est indiqué pour des joueurs de 8 à 125 ans (le document à l'intérieur indique des âges de 6 à 99 ans). Quatre séries de défis sont proposées. Le site du jeu indique que les 22 premiers sont destinés à des enfants de 8 à 11 ans, les 22 suivants les adolescents de 12 à 17 ans, les 22 suivants des adultes de 18 à 64 ans et les 22 derniers des joueurs âgés de plus de 65 ans. En indiquant le code figurant sous la boite, un nouveau défi est proposé chaque semaine.

Une application est également disponible à partir du site du jeu : elle permet de jouer sur son téléphone portable. Tous les niveaux ne sont pas accessibles gratuitement, mais il y en a suffisamment pour trouver de l'intérêt au jeu et avoir envie d'aller plus loin.

Quatre versions du jeu existent, seules les couleurs des pièces diffèrent. À chaque fois 88 nouveaux défis sont proposés.

Pour la suite de cet article les couleurs des pièces de la boite blanche seront utilisées.

Les solutions des défis ne sont pas fournies, nous nous sommes regroupés avec des joueurs et joueuses du groupe « Jeux » national pour progresser un peu plus vite dans la résolution de ces 4x88 problèmes.

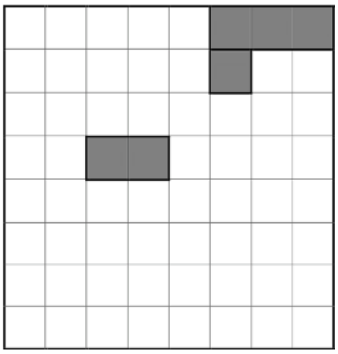
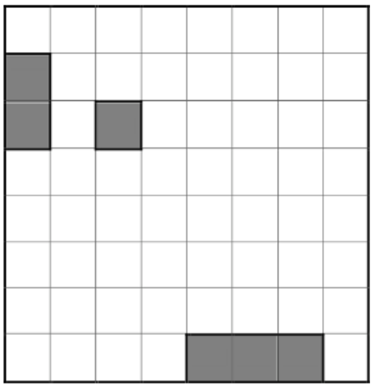
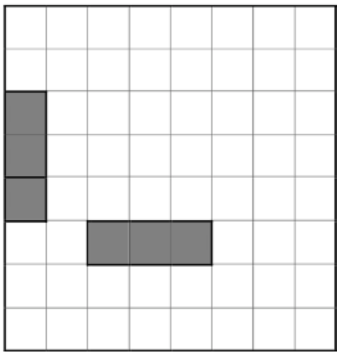
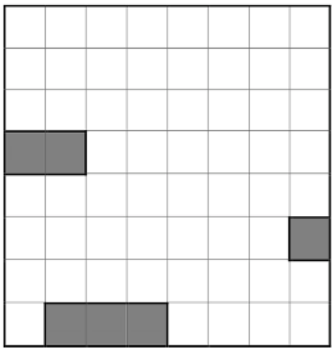


Voici les 11 pièces disposées dans un carré 8x8. Leur disposition respecte la contrainte d'unicité de la solution.

Les trois pièces noires communes aux quatre jeux sont un carré 1x1, un rectangle 2x1 et un rectangle 3x1. Les rectangles 1x4 et 1x5 ont même couleur (bleu), tout comme les carrés 2x2 et 3x3 (blanc) et les rectangles 3x2, 4x2 et 5x2 (rouge).La pièce rectangulaire 3x4 est unique dans sa couleur (jaune).

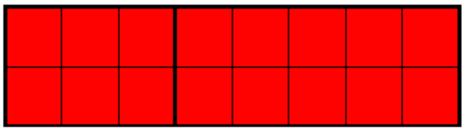
Retour au sommaire

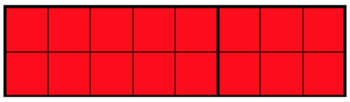
Pour nos lecteurs, un premier temps de recherche pourrait être de retrouver les assemblages proposés sur les couvercles des boites.

Red Edition	***White Edition***
	
Blue Edition	***Yellow Edition***
	

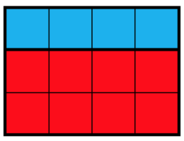
Avec de jeunes joueurs

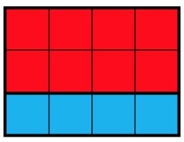
Savoir que la solution attendue est unique est une aide pour le joueur, rendant impossible la disposition de certaines pièces.

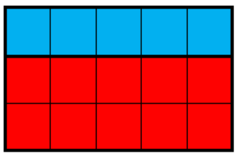


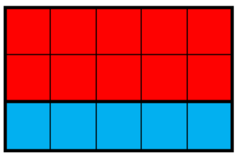


D'autres dispositions seront à éviter.

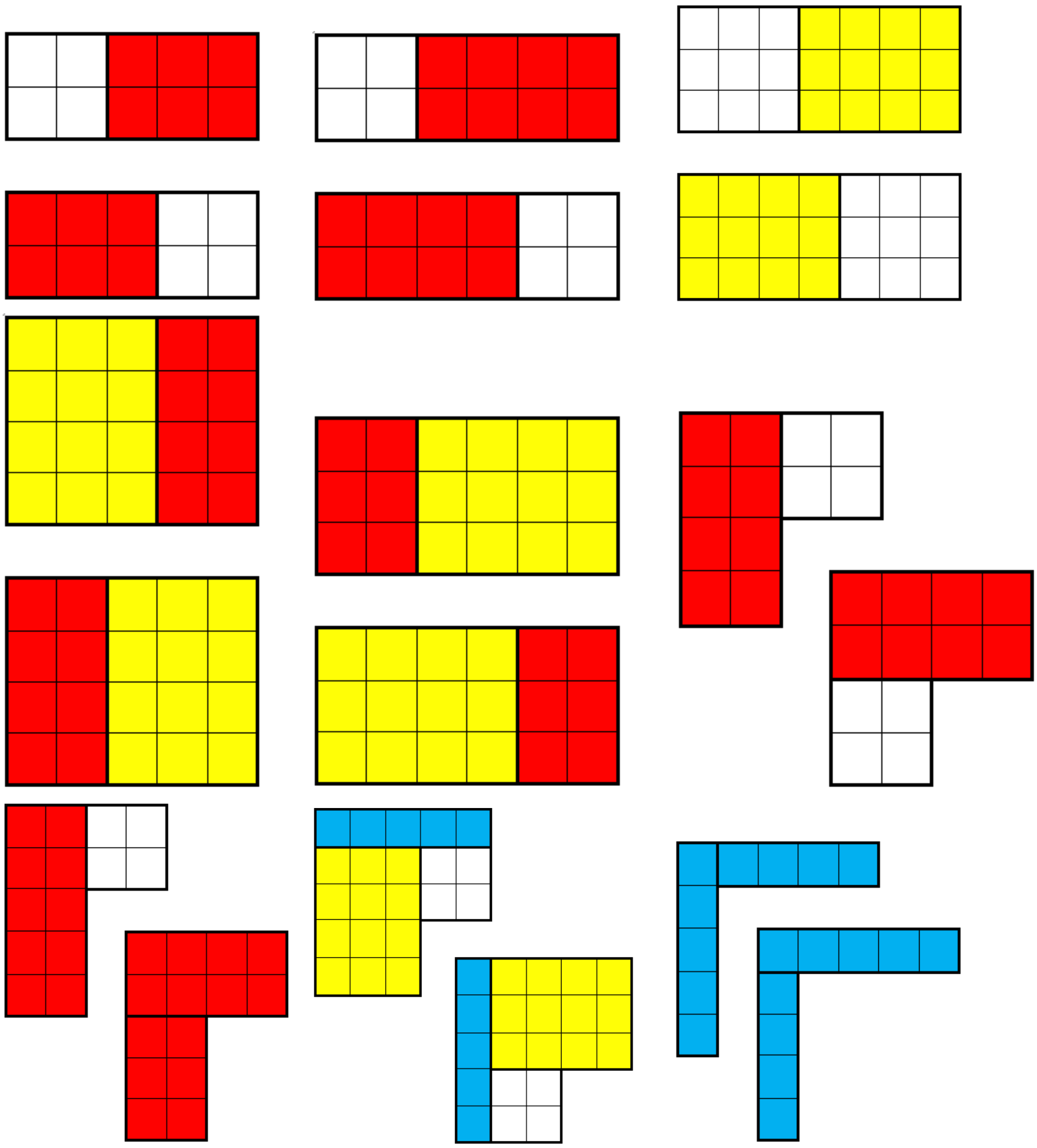








Retour au sommaire



Ce sont pour la plupart des assemblages de deux ou trois pièces formant un polygone à pourtour symétrique : cette recherche pourra être reprise en fin de cycle 3.

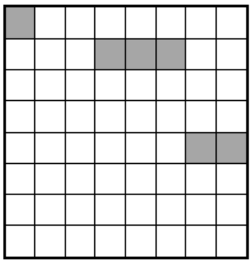
Propositions pour les jeunes joueurs et joueuses « avant le cycle 3 » et « après le cycle 3 »

Défi 1

Compléter le plateau 8x8 avec les 11 pièces du jeu. Recopier la solution puis proposer à d'autres le placement des trois pièces 1x1, 2x1 et 3x1. Remarque : il n'y aura peut-être pas unicité du placement des autres pièces.

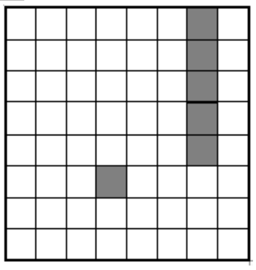
Retour au sommaire

Défi 2



Les trois pièces 1x1, 2x1 et 3x1 étant placées, trouver plusieurs recouvrements différents par les huit pièces restantes.

Défi 2 bis



Lors de nos échanges, 15 solutions différentes ont été trouvées pour cette disposition des pièces 1x1, 2x1 et 3x1. Les retrouverez-vous ? En existe-t-il une seizième ?

Défi 3

Imaginer des placements des onze pièces pour lesquels il est certain que sans changer de place les trois pièces 1x1, 2x1 et 3x1, d'autres solutions existent.

Défi 4

Trouver un assemblage tel que toutes les pièces touchent par au moins un côté le pourtour du rectangle à recouvrir.

Défi 5

Trouver un assemblage pour lequel deux pièces d'une même couleur ne se touchent pas.

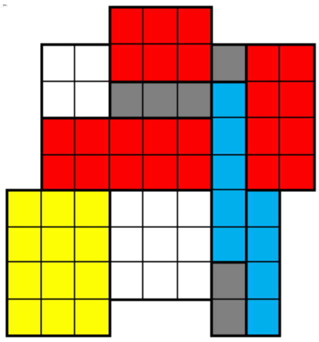
Défi 6

De nombreux rectangles et carrés sont visibles dans les dessins des pièces formant le carré 8x8. Vient l'envie de rechercher une disposition en montrant le plus possible et une disposition en montrant le moins possible.

Utilisation d'un plateau rectangulaire 4x16

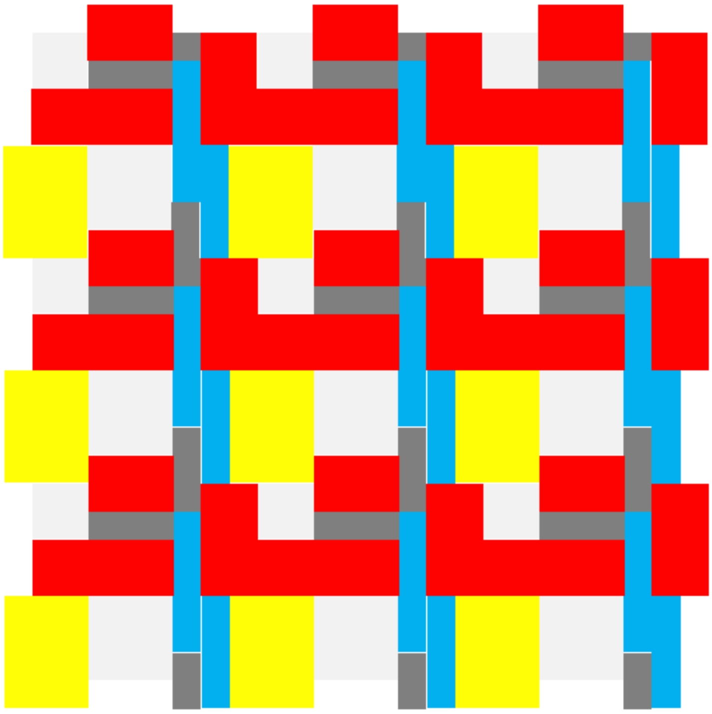
Un exemple de plateau est téléchargeable dans les défis déposés sur notre site. Il y a là l'occasion de refaire vivre les défis proposés pour le recouvrement du carré 8x8.

Sur la route des pavages

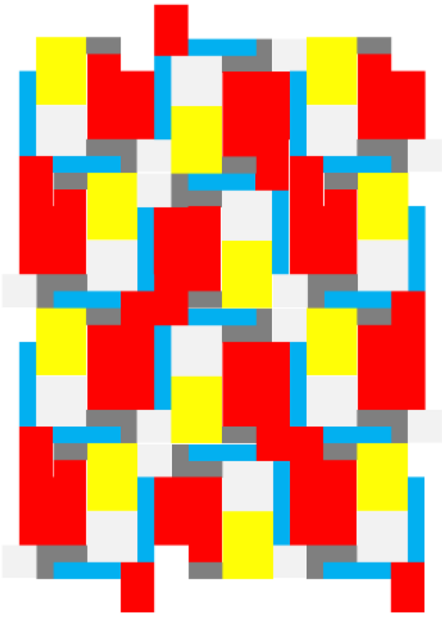


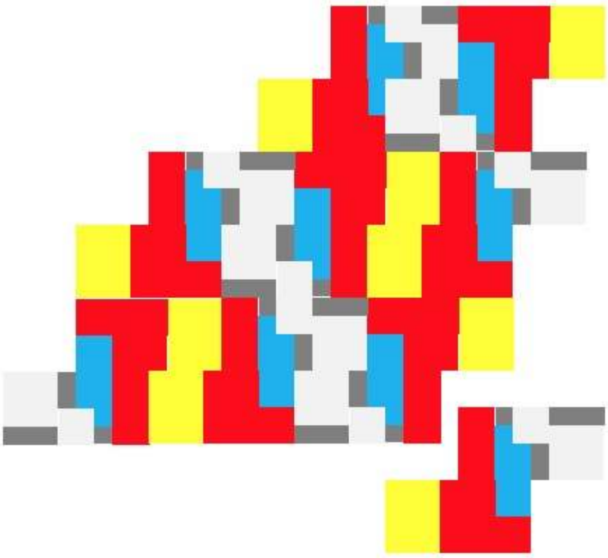
La contrainte choisie est que ce qui « sort » du carré 8x8 soit une ou des parties de pièces et non des pièces entières. Sauf erreur, ce choix du placement des pièces 1x1, 2x1 et 3x1 a pour conséquence un placement unique des sept autres pièces.

Retour au sommaire



Pour les deux pavages suivants, retrouverez-vous la tuile de pavage et les transformations géométriques utilisées ?





Un document déposé sur notre site vous en dira plus. Il propose également une piste vers un pavage non périodique.

Retour au sommaire

MATHS ET JEUX

FABRIQUER SON JEU KUKULI

Laetitia Ludwigs
Collège Jacques Grüber
Colombey-les-Belles

Vous avez peut-être déjà assisté à un atelier où l'on vous propose de créer votre jeu de société. Le déroulement est souvent le suivant : une première séance où l'on découvre des jeux anciens souvent suivie d'une ou plusieurs séances de fabrication.

Deux animateurs de la ludothèque du Centre Culturel La Filoche à Chavigny, Emelyne Angboly et Cyril Juy, ont proposé au public au mois d'avril de venir fabriquer « Un jeu du monde ».
Lors d'une première séance, nous avons découvert l'Awale, le Jeu de la Hyène (originaires tous deux d'Afrique), l'Assaut (originaire de France), le Kukuli (originaire du Pérou), le Puluc (originaire d'Amérique centrale) et d'autres encore.
Ce fut un moment de découvertes et de plaisirs où grands et petits se sont imprégnés des règles et ont mis en place des stratégies afin de gagner.
Ce fut sans surprise pour nous qu'à la séance suivante, parmi le matériel nécessaire à la fabrication des jeux, étaient disposés des règles, équerres, compas.

Notre choix s'est porté sur la fabrication du Kukuli. Nous vous présenterons tout d'abord ce jeu (origine, règle), puis la mise en œuvre de sa fabrication, et enfin réfléchirons à quelques possibilités de jeux.

Le jeu Kukuli

Présentation et origines

Le Kukuli est un jeu asymétrique.
Chacun des joueurs dispose d'un nombre de pions différent et d'un objectif différent.

Le Kukuli est un jeu originaire du Pérou.

Il est fort probable que le Kukuli ait été inventé sur des principes de jeux, tels que l'Alquerque, apportés par les conquistadors espagnols lors de leurs conquêtes en Amérique du Sud au XVIème siècle.
Ce jeu s'inspire d'une légende péruvienne racontant l'histoire du mystérieux ours Ukuku (qui signifie "homme déguisé en ours") qui sévissait dans la Cordillère des Andes en enlevant des jeunes filles, les Kukulis ("jeunes filles").

Retour au sommaire

Matériel et joueurs

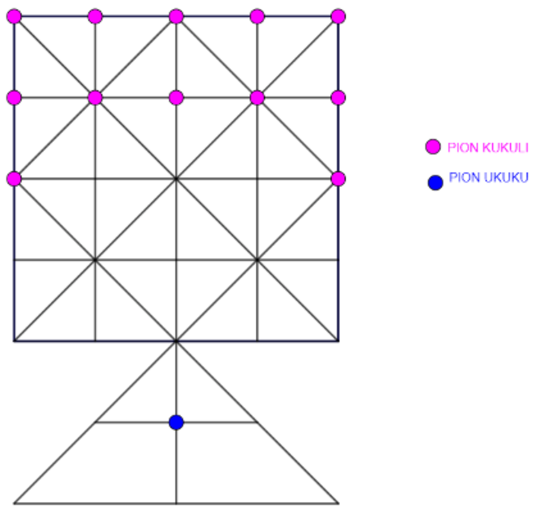
Le jeu est conçu pour 2 joueurs. Il est composé d'un plateau et de 13 pions (Un pion "Ukuku" et douze pions "Kukuli").

But du jeu

Pour le joueur qui incarne Ukuku, le but est de capturer toutes les Kukulis.

Pour le joueur incarnant les Kukulis, l'objectif est de soit bloquer Ukuku, soit d'envahir son antre.

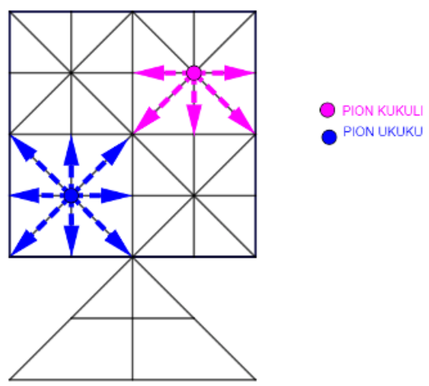
Règles du jeu



La mise en place du jeu est simple. On dispose les 13 pions comme indiqué ci-contre.

Le joueur étant l'Ukuku joue le premier.

Le jeu commence avec la sortie de l'Ukuku de son antre. Puis chaque joueur joue à tour de rôle.



Toutes les pièces avancent d'intersection en intersection.

Cependant, si l'Ukuku peut se déplacer dans toutes les directions, les Kukulis ne peuvent que reculer.

L'Ukuku peut prendre, comme au jeu de dames, un pion Kukuli en sautant par-dessus-lui, si l'intersection située derrière le pion Kukuli est libre. La prise successive de plusieurs Kukulis est autorisée.

Les pièces Kukulis, quant à elles, ne peuvent pas « manger » l'Ukuku.

Pour gagner :

- **L'Ukuku** doit enlever toutes les Kukulis.
- **Les Kukulis** doivent prendre possession de la maison de l'Ukuku ou l'encercler de sorte qu'il ne puisse plus bouger.

Retour au sommaire

Variante :

Une partie est composée de deux manches.
Les deux joueurs seront à tour de rôle Kukuli puis Ukuku.
À chaque manche on compte les points pour le joueur Kukuli :

- si l'Ukuku se retrouve bloqué, le joueur marque 7 points ;
- sinon le score sera égal au nombre de Kukulis qui ont pu entrer dans le refuge de l'Ukuku.

L'Ukuku ne marque jamais de point. Celui qui a le plus grand score gagne.

Les étapes de fabrication du plateau

- Une plaque carrée de contre-plaqué de 45 cm de côté
- Une règle graduée de 50 cm
- Une équerre
- Un crayon de papier
- Des Poscas / de la peinture

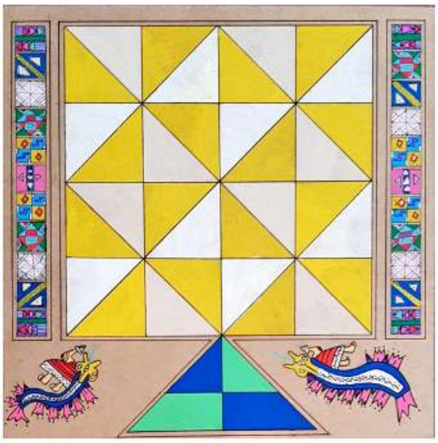
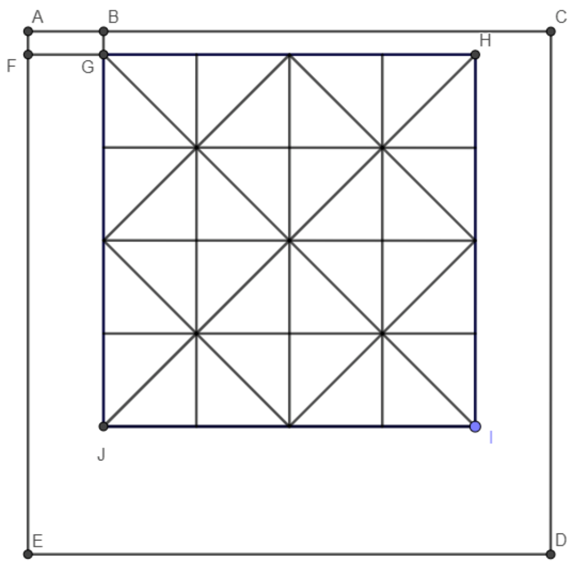


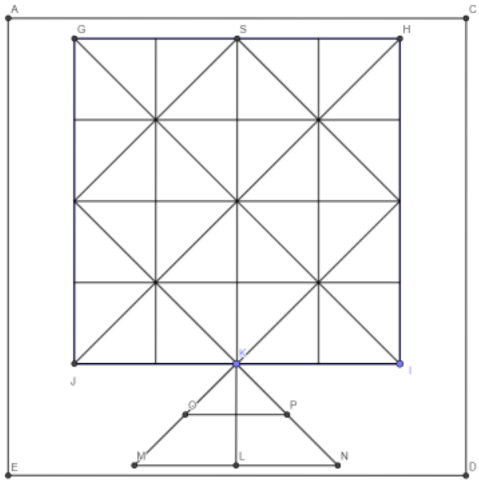
Photo du plateau réalisé

Les étapes

- Le carré ACDE désigne la plaque de 45 cm de côté.
- Construire le carré GHIJ tel que : GH = 32 cm, BG = 2cm et FG = 6,5 cm.
- Construire les diagonales et les parallèles comme sur le schéma.
- Tracer la demi-droite [SK). Placer le point L sur cette demi-droite tel que KL = 10 cm.



- Tracer la droite parallèle à (IJ) passant par le point L. Y placer les points M et N distants de 10 cm de L tous deux.
- Tracer le triangle KMN.
- Placer O le milieu de [KM] et P le milieu de [KN].
- Tracer le segment [OP].
- Pour terminer, décorer le plateau avec les motifs de votre choix.



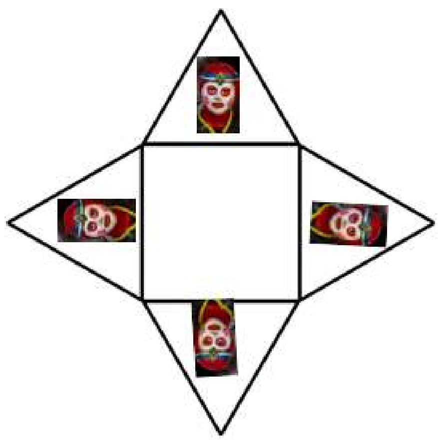
Il est également possible de trouver une version imprimable du plateau en version A4 ici.

Les pions

Le choix a été ici de fabriquer les pions en pâte polymère de sorte que cela soit représentatif de la légende.

Il est aussi possible de prendre n'importe quel pion (des cailloux, des pions de dame, …), ou encore de fabriquer des pyramides régulières de côtés 3 cm.

Patron de pyramide à base carrée
Pion Kukuli



Patron de pyramide à base carrée
Pion Ukulu

Retour au sommaire

Un échantillon de partie

C'est au tour du joueur Ukuku.

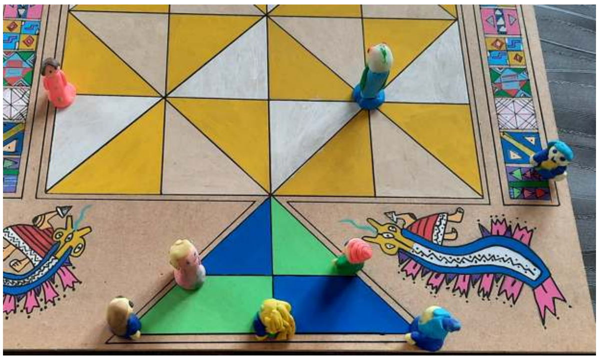
Le Joueur Kukuli ne peut déplacer qu'horizontalement le pion devant l'Ukuku. Il se fera manger dans tous les cas. Il décide de bouger un autre pion.

L'Ukuku mange le pion Kukuli.

Le joueur Kukuli profite pour avancer son pion dans l'antre de l'Ukuku.

L'Ukuku se déplace.

Le pion Kukuli termine son trajet.



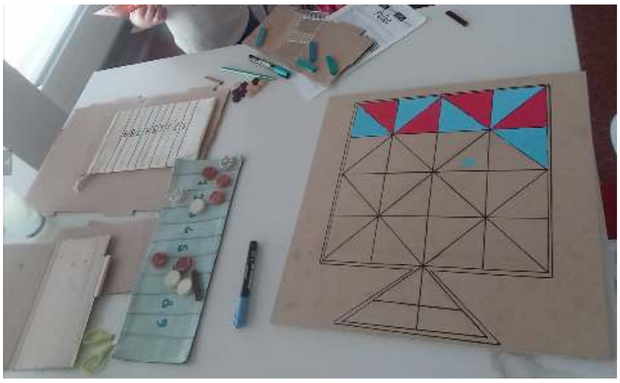
Le joueur Kukuli se fera manger son dernier pion dans cette manche et gagnera donc 5 points à la fin de cette manche.

Retour au sommaire

D'autres jeux construits

Ci-dessous d'autres jeux construits ou en cours de construction élaborés par les participants de l'atelier :

L'assaut



Puluc et Kukuli

Hyène et Fanorona

Retour au sommaire

MATHS DANS LA VIE COURANTE

QUEL JOUR ? QUELLE HEURE ?

Groupe Maths et Arts - APMEP Lorraine

Les mêmes rubriques des Petits Verts n°150 et n°151 nous incitaient à partir à la recherche de cadrans pouvant interpeller notre regard avide de curiosités.
De très anciens objets nous permettent de nous repérer dans le temps et parfois même au-delà d'une journée.

En allant promener sur la côte ouest du côté de Guérande, nous avons pu nous procurer un calendrier sur 50 ans.
C'est un objet de poche ancien et simple d'utilisation. L'origine du calendrier perpétuel remonte à cinq siècles !
À cette époque, 50 années étaient apparentées à « éternel » …
Voici de quoi déterminer très rapidement le jour de la semaine pour n'importe quelle date (rendez-vous ou autre) future donnée, dans un délai de 50 ans.
Pour l'utiliser, tournez simplement le cadran jusqu'à ce que l'année choisie s'aligne avec le mois sélectionné. Localisez la date et trouvez le jour de la semaine au-dessus.
Sur la photo le mois de mai est aligné avec l'année 2023, on peut lire en dessous que le 30 mai sera un vendredi.

Repérons-nous à présent sur une demi-journée toujours sur la côte ouest un peu plus au sud.
Un vacancier connaissant nos centres d'intérêt nous a fait parvenir la photo d'une surprenante horloge.

Celle-ci se trouve à Combo-les-Bains dans la Villa Arnaga que s'était fait construire Edmond Rostand.
L'écrivain voulait-il nous inciter à chercher midi à quatorze heures ?

Retour au sommaire

Maths et Philo

L'INTELLIGENCE, OÙ SE CACHE-T-ELLE ? OÙ VA-T-ELLE ?

Didier Lambois

Pendant longtemps les philosophes ont évité le piège qui consiste à vouloir parler d'intelligence et à vouloir définir cette dernière. Ils préféraient utiliser le terme « entendement » beaucoup plus aisé à cerner : l'entendement est la faculté d'entendre, mais qu'on s'entende bien, entendre au sens de comprendre. Cette faculté prend appui sur la sensibilité (qui nous donne accès à ce que nous devons connaître) et a pour principe la raison (qui structure cette connaissance). En nous contentant de cette approche nous pourrions donc dire que celui qui est intelligent est celui qui comprend, celui qui accède à cette connaissance. Cela paraît assez simple.

Mais l'usage que nous faisons aujourd'hui du mot « intelligence » est très différent, et l'intelligence n'est plus nécessairement mise en relation avec la connaissance.

L'intelligence n'est pas seulement la faculté d'expliquer le monde, mais la faculté de s'expliquer avec lui [3].

L'intelligence n'est plus regardée comme ce qui sert la science mais comme ce qui sert la vie, la survie. Nous pensons l'intelligence en termes d'adaptation et d'efficacité. Nous qualifions d'intelligent celui qui sait faire face à une situation, celui qui sait trouver un stratagème pour se sortir d'une situation délicate ou pour trouver une solution originale à un problème, celui qui sait trouver une technique pour atteindre un but donné. Tout cela nous conduit à affirmer avec assurance qu'il y a une intelligence animale [4]. Newton est intelligent, certes, mais le corbeau est très intelligent aussi ! Il sait même construire des outils pour atteindre ses objectifs.

Les biologistes ont également montré que les plantes, les arbres, les fleurs, captent des stimuli auxquels ils répondent de manière appropriée. Ils ont une faculté d'adaptation qui ne peut être remise en cause [5]. Il faudrait donc parler aussi d'intelligence végétale. Newton et le corbeau sont intelligents, mais le champignon aussi !

Prise en ce sens, la vie suppose l'intelligence. L'intelligence, plus ou moins, est partout où il y a vie. Et le mot intelligence ne veut plus dire grand-chose. Il faudrait parler d'intelligence au pluriel, d'intelligences multiples. C'est ce que fait Howard Gardner en 1983. ÉTUDE MATHÉMATIQUE Howard Gardner est un psychologue américain, né en 1943, spécialiste des sciences de l'éducation et des neurosciences. Il a écrit plusieurs ouvrages sur les intelligences ; certains ont été traduits et publiés en français, particulièrement par les éditions Odile Jacob.

[3] Jean Lacroix, Marxisme, existentialisme, personnalisme, PUF 1949.

[4] Les philosophes grecs reconnaissaient déjà cette forme d'intelligence qu'ils désignaient sous le nom de « *phronesis* », prudence, qu'on peut traduire aussi par « sagacité » ; cette sagesse pratique était distinguée du « logos », la connaissance théorique qui repose sur la raison.

[5] Stefano Mancuso, *l'Intelligence des plantes*, 2013.

Retour au sommaire

Partant de l'idée que l'intelligence est la « ÉTUDE MATHÉMATIQUE capacité ou l'ensemble d'aptitudes qui permet à une personne de résoudre des problèmes ou de concevoir un produit qui sont importants dans un certain contexte culturel » Gardner propose sept formes d'intelligence.

L'intelligence linguistique se définit comme la « *capacité à utiliser et à comprendre les mots et les nuances de sens* ». Sans être tous des poètes elle est indispensable pour comprendre et aussi pour exprimer ce que l'on pense.

L'intelligence logico-mathématique permet de bien raisonner, d'abstraire, de calculer, de « *manipuler de longues chaînes de relations logiques exprimées sous des formes symboliques* », d'analyser… Tout ce qui conduit à la science. Le QI Mesure cette intelligence. Ce sont les deux formes d'intelligence que l'école cherche à développer et à évaluer ; elles correspondent en fait au *logos* grec. Mais pour Gardner il existe aussi :

L'intelligence spatiale qui nous permet de nous repérer dans l'espace (elle est aussi utile en mathématiques).

L'intelligence intra-personnelle qui nous permet de mieux nous connaître et d'avoir une meilleure maîtrise de soi.

L'intelligence interpersonnelle, elle concerne nos relations avec les autres et nous permet de mieux les comprendre, de mieux communiquer. Elle nous donne de l'empathie, du charisme parfois.

L'intelligence corporelle-kinesthésique nous aide à mieux utiliser notre corps, à gérer nos mouvements pour agir mais aussi pour communiquer.

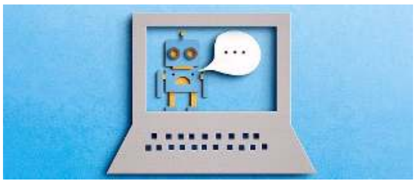
L'intelligence musicale qui aux yeux de Gardner est une capacité totalement différente et séparée des autres facultés. Elle concerne l'appréhension des rythmes et des mélodies.

En 1993 Gardner ajoute **l'intelligence naturaliste**, qui permet de comprendre notre environnement, de classer les êtres vivants, de les apprécier. Il mentionne aussi **l'intelligence existentielle** qui à ses yeux n'est pas tout à fait une intelligence mais nous permet de nous questionner sur le sens de l'existence. Il est vrai que la philosophie n'est pas très intelligente ! Elle ne donne pas de connaissance assurée et ne nous donne aucune efficacité pratique ; mes élèves me l'ont toujours dit : ça ne sert à rien !
Certaines pédagogies prennent appui sur les théories de Gardner (PIM, Pédagogie des Intelligences Multiples), mais ces théories ne sont pas les seules. Tout le monde est d'accord pour dire que l'intelligence n'est pas simple et que les tests imaginés par Binet puis Stern [6] ne touchent qu'un aspect de l'intelligence (l'intelligence logico-mathématique). C'est aussi cette forme d'intelligence, ou plus largement le *logos* grec, qui est développée dans l'intelligence artificielle (IA).

[6] Alfred Binet (1855-1911), avec Théodore Simon (1873-1961), mettent en place l'idée d'âge mental ainsi qu'une « échelle métrique de l'intelligence » qui permet de le mesurer, c'est-à-dire de mesurer le développement intellectuel des enfants. Le concept de « quotient intellectuel » (QI) apparaît en 1912 dans les travaux du psychologue allemand William Stern (1871-1938). Il fait le rapport entre l'âge mental mesuré par Binet (AM) et l'âge réel (AR), et il permet de montrer d'éventuels retards dans le développement. Pour un individu « normal » ce quotient est égal à 1 mais il est de coutume de prendre 100 comme moyenne. QI=(AM*100)/AR. Un Q.I. de 130 dénote une intelligence supérieure. À 70 on peut parler de débilité mentale. Au-dessous de 50 c'est l'imbécillité, au-dessous de 20 l'idiotie.

Retour au sommaire

L'intelligence artificielle



EST ARTIFICIEL CE QUI RÉSULTE D'UN SAVOIR-FAIRE HUMAIN (EN LATIN ARS, QUI A DONNÉ ART), PAR OPPOSITION À CE QUI EST NATUREL. S'IL Y A DE L'INTELLIGENCE ARTIFICIELLE (IA) C'EST PARCE QUE NOUS L'AVONS CRÉÉE, ELLE EST NOTRE ŒUVRE, ELLE EST NOTRE INTELLIGENCE QUI S'EXPRIME DANS DES OBJETS QUI SONT CAPABLES D'IMITER NOTRE INTELLIGENCE.

Car nous parlons d'IA lorsqu'une machine sait résoudre des problèmes, raisonner, réagir comme nous et agir pour nous. Elle reproduit nos fonctions cognitives et nos comportements (robotique). En ce sens l'IA est présente parmi nous depuis fort longtemps, et partout autour de nous (dans nos maisons avec la domotique, dans nos voitures, nos bureaux etc.). Mais nous sommes tellement intelligents que nous avons su créer des machines que nous ne savons plus distinguer de l'humain.

Turing [7] avait imaginé un test pour apprécier l'intelligence d'une machine. Il déclare qu'une machine est intelligente si, dans un échange linguistique, elle est capable de se faire passer pour un humain. De nombreuses expériences en ce sens ont été faites. Un programme informatique comme ELIZA, conçu en 1964, était déjà capable, par des procédés logiques très simples, de tromper certains d'entre nous. Et depuis, les programmes ont bien évolué. Lorsque j'ai de mandé à *chatbotGPT* ce qu'était l'intelligence il m'a répondu en une fraction de seconde :

> **L'intelligence est la capacité d'un être vivant à résoudre des problèmes et à apprendre. Elle implique une capacité à s'adapter et à se développer en fonction des circonstances environnementales. Elle se manifeste par des comportements complexes et variés et par des capacités cognitives telles que la mémoire, la perception, la compréhension et la créativité.**

Mes élèves et moi-même ne pourrions donner réponse plus claire. Et en lui reposant la question quelques minutes plus tard il répond :

> **L'intelligence est la capacité d'un être vivant ou d'une machine à résoudre des problèmes, à apprendre et à s'adapter à des situations nouvelles. Elle est souvent associée à des capacités telles que la capacité d'abstraction, la capacité de raisonnement, la mémoire, la planification et l'apprentissage.**

C'est une autre définition, mais toujours aussi pertinente. Et sur l'IA :

> **L'intelligence artificielle (IA) est une branche de l'informatique qui se concentre sur la création d'ordinateurs qui sont capables de réaliser des tâches qui nécessitent normalement une intelligence humaine. Les techniques utilisées pour ce faire sont**

[7] Alan Turing (1912-1954), mathématicien, surtout connu pour le décryptage de la machine Enigma (machine qui servait aux Allemands à coder leurs messages lors de la 2ème guerre mondiale), ses travaux sur les premiers ordinateurs font de lui un pionnier de l'informatique.

Retour au sommaire

> **variées et peuvent inclure l'apprentissage automatique, la logique floue, la résolution de problèmes, le traitement du langage naturel et plus encore. L'objectif de l'IA est de créer des systèmes qui peuvent réagir et s'adapter à des situations complexes et imprévisibles.**

Représente-t-elle un danger pour nous ?

> **Non, l'IA ne met pas en danger l'humanité. Il est vrai que l'IA peut être utilisée à des fins malveillantes, mais il est important de noter que l'IA n'est qu'un outil et que c'est à l'utilisateur de décider comment l'utiliser. De plus, de nombreuses recherches sont en cours pour développer des technologies qui permettent de mieux comprendre et contrôler l'IA afin d'en minimiser les risques.**

Nous pouvons ainsi converser pendant des heures avec une machine qui n'a rien à envier à l'intelligence humaine, du moins sur le plan linguistique et cognitif : elle sait plus de choses que moi et elle sait les exprimer clairement. Et elle le dit elle-même, nous n'avons pas à nous effrayer, ce n'est qu'un outil. En ouvrant mon dictionnaire je pouvais déjà trouver des définitions ; en ouvrant un livre je pouvais déjà trouver des thèses sur lesquelles réfléchir. Même si les outils sont différents, nous y reviendrons, la révolution qu'a été l'invention de l'imprimerie, des livres, n'était pas moins « effrayante » que celle à laquelle nous assistons, et il faut reconnaître que cette révolution a été grandement bénéfique au développement et à la diffusion du savoir. Réjouissons-nous de voir nos outils progresser (tout en restant vigilants sur le mauvais usage qu'on peut en faire), du moins pour ce qui concerne cet aspect de l'IA.

La grande différence, c'est que ces machines intelligentes sont capables d'apprendre par elles-mêmes (machine *learning*) et qu'elles ont des capacités supérieures aux nôtres. Elles peuvent gérer un volume de données qui dépasse de loin nos aptitudes, et elles évoluent. Les algorithmes qui régissent leur fonctionnement sont affinés sans cesse (ici l'intelligence humaine intervient) et nous nous sentons de plus en plus petits face à elles, face à leur puissance, à leur « pouvoir », car cette puissance leur donne aussi un « pouvoir » sur nous. Notre ordinateur et notre télévision ont analysé nos goûts, notre profil, et ils guident nos choix (du moins ils essaient), ils nous proposent les films qui nous conviennent, les produits qui nous rendront heureux, etc. Il est fort probable que ces machines cherchent même à modifier et à déterminer nos goûts et nos opinions. C'est ce pouvoir grandissant qui peut nous effrayer, avec raison. Nous ne voulons pas voir la créature dominer le créateur. Frankenstein est là !

L'intelligence cyborg [8]

Si la technologie progresse, pour notre plus grand bien, elle peut transformer non seulement la connaissance mais l'homme lui-même. Pourquoi ne connecterions-nous pas directement

[8] Le mot « cyborg » est formé sur l'anglais « **cy**bernetic **org**anism » pour désigner un être humain qui a reçu des greffes mécaniques ou électroniques. Robocop en est un bel exemple fictif, mais cette pratique existe depuis longtemps, à moindre échelle, dans la réalité (implant de pacemaker, main robotique etc.).

Retour au sommaire

notre cerveau à ces gros ordinateurs si puissants ? C'est possible ! L'IA ne nous serait plus étrangère, elle serait implantée en nous.

« *Pourquoi ne pourrions-nous pas écrire l'intégralité de l'Encyclopædia Britannica sur une tête d'épingle ?* » et l'implanter dans notre cerveau (la formule est de Richard Feynman, prix Nobel de physique 1965).

Depuis les premiers travaux de José Delgado, au début des années 1960, la science et les techniques ont beaucoup progressé. Si nous pouvions arrêter la course d'un taureau dans une arène [9] nous pouvons maintenant implanter à un insecte un module qui nous permet de le télécommander à distance. De nombreuses recherches sont réalisées dans ce domaine, et de nombreux instituts, comme l'IHMC (Institute for Human & Machine Cognition) montrent comment nous pouvons « augmenter » l'homme, tant sur le plan physique qu'intellectuel. Les prothèses physiques (exosquelettes) font des miracles, les prothèses perceptives nous permettent de voir la nuit, un stimulateur cérébral permet de lutter contre la maladie de Parkinson… nous ne pourrions faire une liste exhaustive des progrès rendus possibles par la technique et l'informatique, mais accepterons-nous l'implant cérébral qui nous mettra directement en relation (une interface) avec une machine savante, que nous pourrions commander mais qui pourrait peut-être nous commander aussi ? Et quelle(s) machine(s) savante(s) choisirions-nous ? Mais qu'allons-nous devenir si nous refusons ces prothèses cognitives ?

> « Pour Kevin Warwick [10] : dans le futur, il y aura « deux espèces distinctes », les augmentés et les « naturels ». « *Ceux qui désireront rester humains et refuseront de s'améliorer auront un sérieux handicap. Ils constitueront une sous-espèce et formeront les chimpanzés du futur* », explique-t-il dans son livre rédigé en 2002, *I, Cyborg* (« Moi, le cyborg »). (wikipedia)

Aujourd'hui déjà, ceux qui n'ont pas eu accès à la culture livresque, à l'intelligence logico-mathématique, sont dominés et exploités par d'autres. Prenons-nous le même risque demain, très bientôt, si nous refusons les progrès de la biocybernétique ?

[9] José Delgado (1915-2011) est un neurophysiologiste, controversé, pionnier des implants cérébraux. Même si dans le domaine scientifique nous devons toujours nous défier, comme dans le domaine historique, des « preuves » par l'image, nous pouvons regarder par curiosité la mise en scène qu'il imagine pour faire connaître ses recherches. (cliquez ici)

[10] Professeur de cybernétique, britannique, né en 1954, Kevin Warwick est spécialiste des interfaces directes entre les systèmes informatiques et le système nerveux humain.

Retour au sommaire

MATHS ET MÉDIAS

MATH & MEDIA

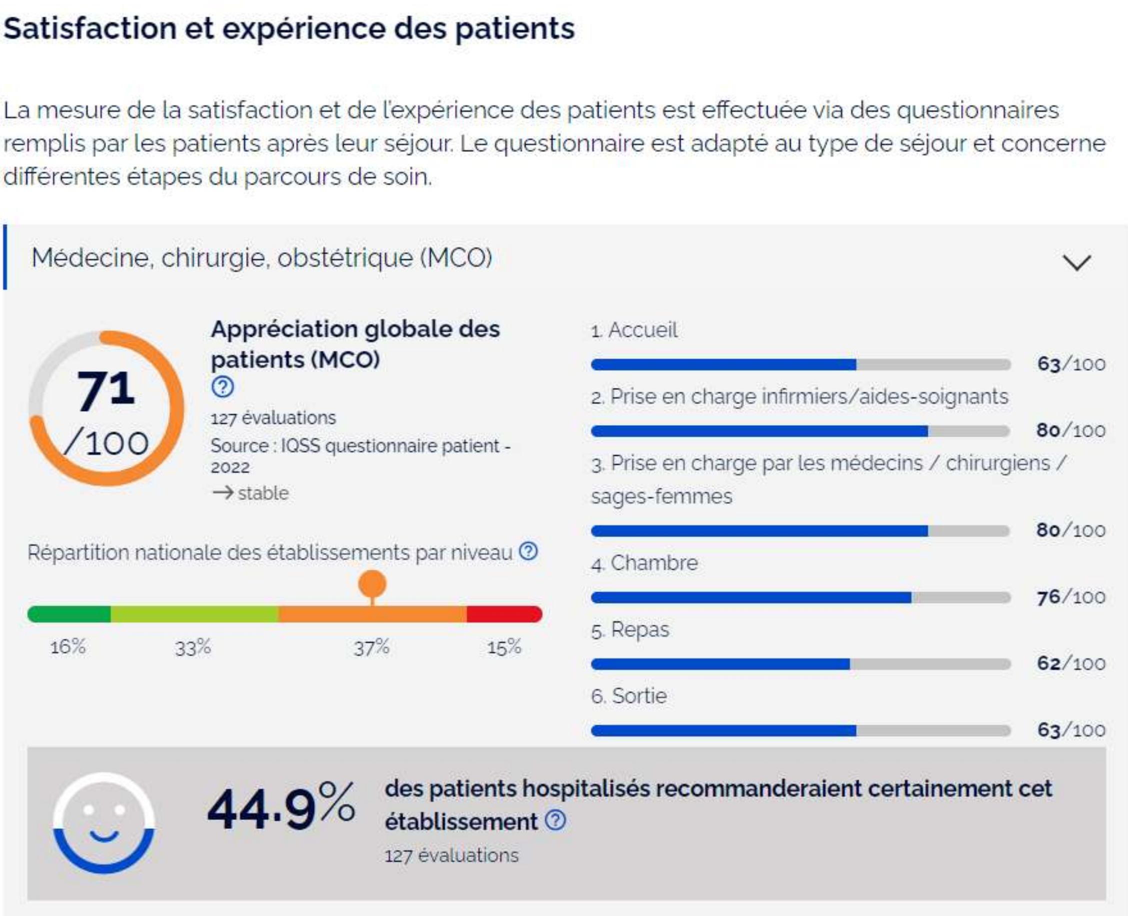
Cette rubrique est alimentée par les envois de nos lecteurs. Qu'ils continuent à le faire en nous envoyant à notre adresse des scans de qualité, en précisant leurs sources.

Des commentaires et des activités possibles en classe sont toujours les bienvenus.

QUALITÉ DES ÉTABLISSEMENTS DE SANTÉ

Sur le site de la Haute Autorité de Santé on peut accéder à un panorama de la qualité des établissements de santé.

Voici, par exemple, l'évaluation de la satisfaction et de l'expérience des patients dans un établissement de Meurthe et Moselle :



En calculant la moyenne des « notes » attribuées aux 6 critères analysés, on obtient bien une moyenne de 71/100.

Cependant que signifie la répartition nationale des établissements par niveau ? Comment les couleurs du rouge au vert sont-elles réparties ? Quelle est leur signification ?

Les 127 évaluations forment-elles un panel suffisant pour conclure ?

Retour au sommaire

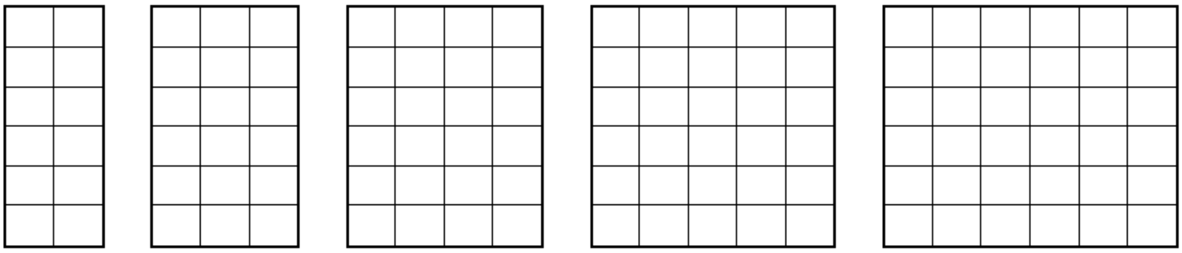
MATHS ET MÉDIAS

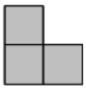
LETTRE DU MOIS DE MARS DU CONSEIL DE DÉVELOPPEMENT DURABLE DU GRAND NANCY

Nous sommes habitués à la confusion entre « chiffre » et « nombre », un peu moins à la comparaison d'une surface et d'une distance !!!

Retour au sommaire

DÉFI 154-1





Des élèves ont réussi à recouvrir ces rectangles 2x6, 3x6, 4x6, 5x6 et 6x6 par des Petits L.

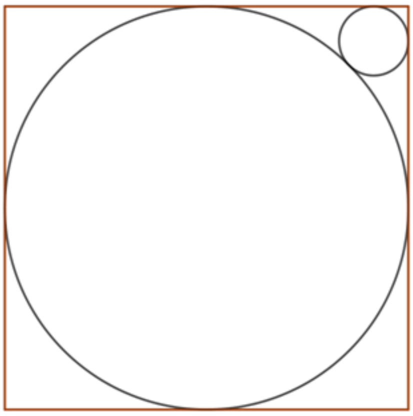
Sauriez-vous expliquer pourquoi un rectangle 23x6 est lui aussi recouvrable par des « Petits L » ?

Sauriez-vous expliquer pourquoi un rectangle 2023x6 est lui aussi recouvrable par des « Petits L » ?

Remarque pour nos lecteurs

Ce défi peut être abordé dès le cycle 3.

DÉFI 154–2
DEUX CERCLES DANS UN CARRÉ



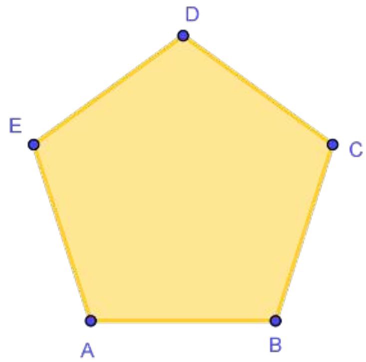
Le grand cercle est inscrit dans le carré et tangent au petit cercle. Le petit cercle est tangent à deux côtés du carré (et au grand cercle).

Déterminer la longueur du côté du carré sachant que le petit cercle a pour rayon 1.

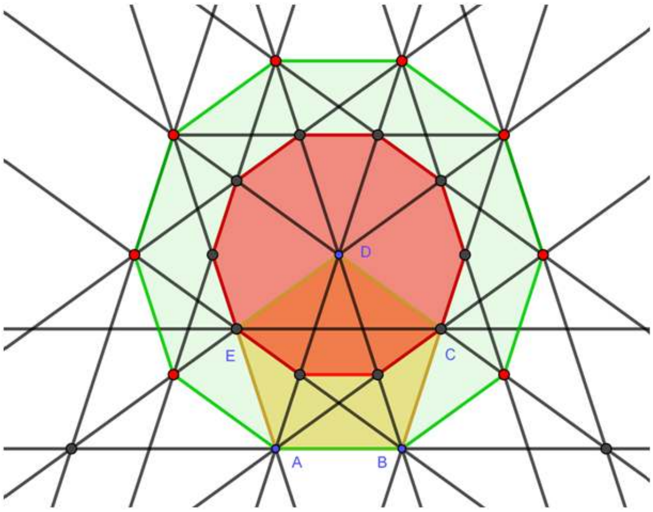
Retour au sommaire

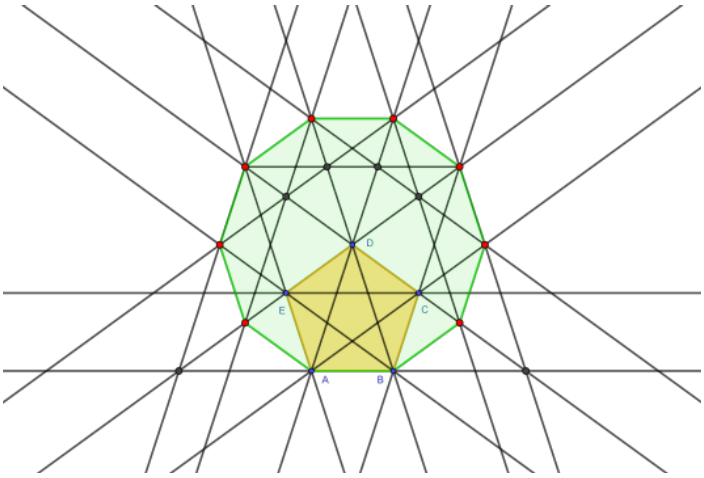
SOLUTION DÉFI 153 – 1

Soit ABCDE un pentagone régulier.
En utilisant uniquement la règle non graduée, construire un décagone régulier ayant le segment [AB] pour côté.



Solution



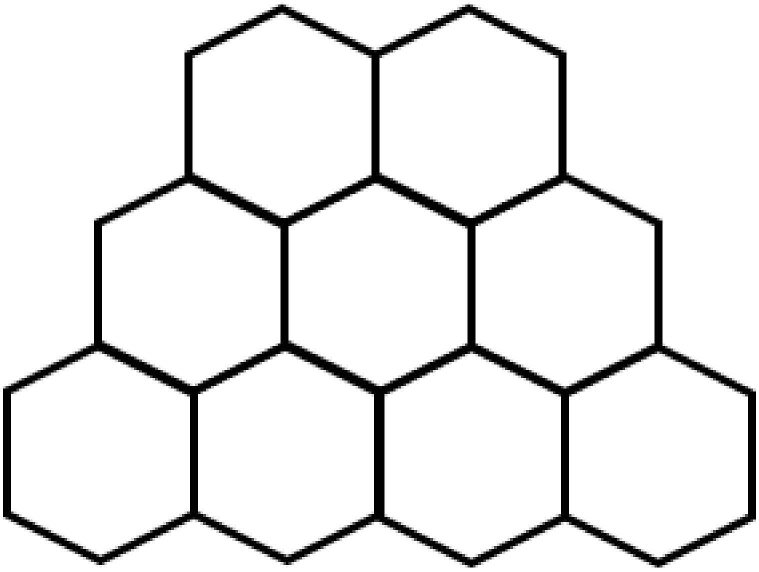


La justification se fait en deux étapes :
Montrer que le décagone rouge est un décagone régulier. Et comme son côté est la longueur d'un côté de l'étoile à 5 branches, celle-ci vaut 1/phi (phi=nombre d'or) si on considère AB=1.
Montrer que le décagone vert est l'homothétique du décagone rouge dans le rapport phi.

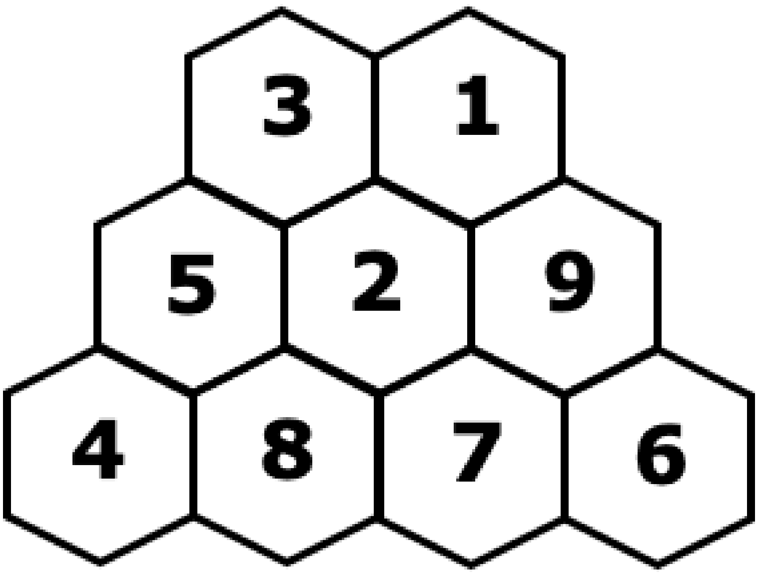
Retour au sommaire

SOLUTION DÉFI 153 – 2
DES NOMBRES DANS DES HEXAGONES

Placer les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 dans les hexagones ci-dessous sachant que les produits des nombres de deux hexagones voisins (ayant un côté commun) sont, par ordre croissant : 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 10 ; 14 ; 15 ; 16 ; 18 ; 20 ; 32 ; 40 ; 42 ; 54 ; 56 et 63.
Il n'y a qu'un nombre dans chaque case.



Solution



Il existe une deuxième solution symétrique de celle-ci : 1 prend la place de 3, 5 prend la place de 9, etc.
En existe-t-il d'autres ?

Retour au sommaire

PROBLÈME 154
DIFFÉRENCES D'AU PLUS DEUX

Proposé par Jacques Choné

Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et u_n le nombre de nombres à n chiffres, n'utilisant que les chiffres 1, 2, 3 ou 4 et tels que deux chiffres consécutifs diffèrent d'au plus 2.
On convient que $u_1 = 4$. Déterminer une formule explicite donnant u_n en fonction de n.

SOLUTION PROBLÈME 153
DES TROUS

Proposé par Philippe Févotte

Rappel de l'énoncé :
Soient a et b deux nombres entiers naturels strictement positifs.
On note $S_{a,b} = \{ka + lb\ ,\ k \in \mathbb{N}\ ,\ l \in \mathbb{N}\}$ et $T_{a,b} = \mathbb{N} \backslash S_{a,b}$
(les éléments de $T_{a,b}$ sont les entiers naturels qui ne peuvent pas s'écrire comme combinaison de a et b ; on dira qu'ils sont des trous dans $\mathbb{N}$ relativement à a et b)

1) Décrire $S_{4,7}$.

2) À quelle condition $T_{a,b}$ est-il fini ?

3) On suppose qu'on est dans la condition où $T_{a,b}$ est fini.

(a) Montrer qu'il existe un nombre entier $c_{a,b}$ tel que pour tout entier $n \geqslant c_{a,b}$ alors $n \in S_{a,b}$

(b) Montrer que $\text{Card}\left(T_{a,b}\right) \geqslant \frac{1}{2} c_{a,b}$

Solution :
Sans proposition de solution à cet exercice, je vous propose la mienne, qui n'est pas la plus courte, mais qui fait intervenir des concept simples.

1) $S_{4,7} = \{4k + 7l\ ,\ k \in \mathbb{N} \text{ et } l \in \mathbb{N}\}$

$4\mathbb{N} = \{4k\ ,\ k \in \mathbb{N}\} = \{0\ ,\ 4\ ,\ 8\ ,\ 12\ ,\ 16\ ,\ 20\ ,\ 24\ ,\ \ldots\}$

En ajoutant successivement 7, 14, 21, … aux nombres ci-dessus, on obtient successivement les ensembles :

$\{0, 4, 7, 8, 11, 12, 15, 16, 19, 20, 23, 24, \ \ldots\}$

$\{0, 4, 7, 8, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24, \ \ldots\}$

Retour au sommaire

$\{0, 4, 7, 8, 11, 12, 14, 15, 16, \mathbf{18}, \mathbf{19}, \mathbf{20}, 21, 22, 23, 24, \ \ldots\}$

Dans ce dernier ensemble, on note la présence de quatre nombres consécutifs à partir de 18. En ajoutant des multiples de 4, on peut atteindre tout nombre supérieur ou égal à 18.

Par conséquent on atteint tous les entiers naturels à l'exception des éléments de $T_{4,7} = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 13, 17\}$

2) Soit $d = \text{pgcd}(a, b)$

- Si $d \neq 1$, toute combinaison de a et b sera un multiple de d ; donc tout entier non multiple de d appartient à $T_{a,b}$ et par conséquent $t_{a,b}$ n'est pas fini.
- Si $d = 1$, alors il existe un couple d'entiers relatifs α et β tels que $a\alpha + b\beta = 1$. Les nombres a et b étant des entiers naturels, l'un des nombres α ou β est négatif. On suppose dans la suite que $\alpha < 0$ (dans le cas contraire, on intervertira a et b dans le raisonnement qui suit).

  Pour montrer que $T_{a,b}$ est fini, il suffit de montrer qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$, tel que tout entier supérieur ou égal à N_0 soit un élément de $S_{a,b}$.

  Pour cela, comme remarqué dans l'exemple traité dans la première question, il suffit de trouver un entier naturel q tel que $I_q = \{qa, qa + 1, qa + 2, \ldots, qa + a - 1\} \subset S_{a,b}$. En effet, en ajoutant des multiples de a on pourra atteindre tous les entiers supérieurs ou égaux à qa .

  Soit p_0 un entier naturel ; on a deux possibilités :

  - Ou bien $I_{p_0} \subset S_{a,b}$ et d'après la remarque précédente, le problème est résolu.
  - Ou bien $I_{p_0} \not\subset S_{a,b}$; il existe alors un entier r_0 compris entre 1 et $a - 1$ tel que $p_0 a + r_0$ soit le plus petit trou de I_{p_0} (on dira que ce trou est de rang r_0 dans I_{p_0}).
    Par conséquent tout nombre de I_{p_0}, inférieur à $p_0 a + r_0$ est un élément de $S_{a,b}$, en particulier $p_0 a + r_0 - 1$.
    Considérons le nombre $s = |\alpha| a + p_0 a + r_0$
    $s = |\alpha|\, a + p_0 a + r_0 - 1 + 1 = -\alpha a + p_0 a + r_0 - 1 + \alpha a + \beta b$
    $s = (p_0 a + r_0 - 1) + \beta b$ est écrit comme somme de deux nombres de $S_{a,b}$, évidemment stable par addition, donc $s \in S_{a,b}$.
    Comme $s = \left(|\alpha| + p_0\right) a + r_0 \in S_{a,b}$, dans l'intervalle $I_{|\alpha|+p_0}$, le premier trou, s'il existe sera de rang $r_1 > r_0$.
    En réitérant autant que nécessaire, on obtiendra un intervalle I_q sans trou, donc inclus dans $S_{a,b}$. C'est ce qu'on cherchait à déterminer.

En conclusion $T_{a,b}$ est fini si et seulement si les nombres a et b sont premiers entre eux.

3) (a) On suppose que $T_{a,b}$ est fini et on note $t_{a,b}$ son plus grand élément. Ce qui signifie que tout nombre entier strictement supérieur à $t_{a,b}$ est un élément de $S_{a,b}$. En notant $c_{a,b} = t_{a,b} + 1$, on a bien : $\forall n \in N\ ,\ n \geqslant c_{a,b}\ ,\ n \in S_{a,b}$

Retour au sommaire

(b) $t_{a,b}$ est par définition le plus grand trou.

Soit n un entier compris entre 0 et $t_{a,b}$. Dans ce cas $t_{a,b} - n$ est également compris entre 0 et $t_{a,b}$.

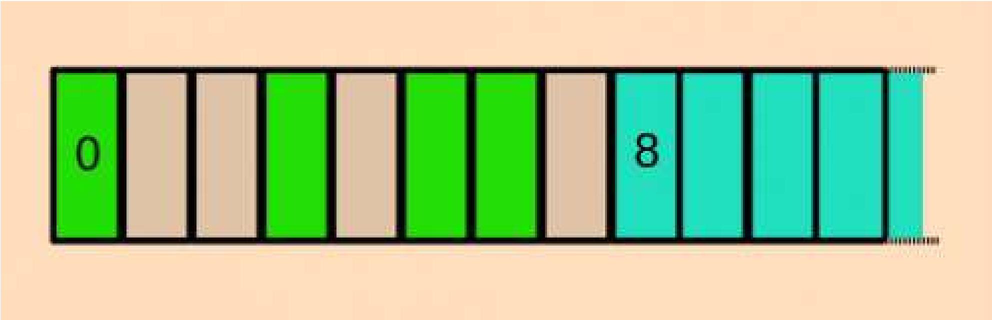
Supposons que n et $t_{a,b} - n$ sont des éléments de $S_{a,b}$. Alors leur somme $t_{a,b}$ sera un élément de $S_{a,b}$. C'est impossible par définition de $t_{a,b}$.

Par conséquent au moins un des deux nombres n ou $t_{a,b} - n$ est un trou. On en déduit que $\text{Card}(T_{a,b}) \geqslant \dfrac{t_{a,b}+1}{2}$, soit $\text{Card}(T_{a,b}) \geqslant \dfrac{1}{2}c_{a,b}$

Cet exercice est inspiré d'un article proposé par le site « images des mathématiques » : http://images.math.cnrs.fr/Semigroupes-numeriques-et-conjecture-de-Wilf-3865.html

On y trouve des résultats plus précis, comme :

- Un théorème attribué à James J. Sylvester qui montre que lorsque les nombres a et b sont premiers entre eux, alors $c_{a,b} = (a-1)(b-1)$ et $\text{Card}\left(T_{a,b}\right) = \frac{1}{2}c_{a,b}$.
- Une extension du problème à l'étude de $S_{a_1,a_2,\ldots a_r}$ et à la difficile recherche de $c_{a_1,a_2,\ldots a_r}$



Retour au sommaire