LE PROBLÈME DU TRIMESTRE N° 153
DES TROUS

Proposé par Philippe Févotte

Soient a et b deux nombres entiers naturels strictement positifs.

On note $S_{a,b} = \{ka + lb, k \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}\}$ et $T_{a,b} = \mathbb{N} \setminus S_{a,b}$.

(Les éléments de $T_{a,b}$ sont les entiers naturels qui ne peuvent pas s'écrire comme combinaison de a et b ; on dira qu'ils sont des trous dans $\mathbb{N}$ relativement à a et b.)

1) Décrire $S_{4,7}$.
2) À quelle condition $T_{a,b}$ est-il fini ?
3) On suppose qu'on est dans la condition où $T_{a,b}$ est fini.
   a) Montrer qu'il existe un nombre entier $c_{a,b}$ tel que pour tout entier $n \geq c_{a,b}$ alors $n \in S_{a,b}$.
   b) Montrer que $card(T_{a,b}) \geq \frac{1}{2} c_{a,b}$.

SOLUTION DU PROBLÈME DU TRIMESTRE N°152
PARTAGE ÉQUITABLE (SECONDE PARTIE)

Proposé par Philippe Févotte

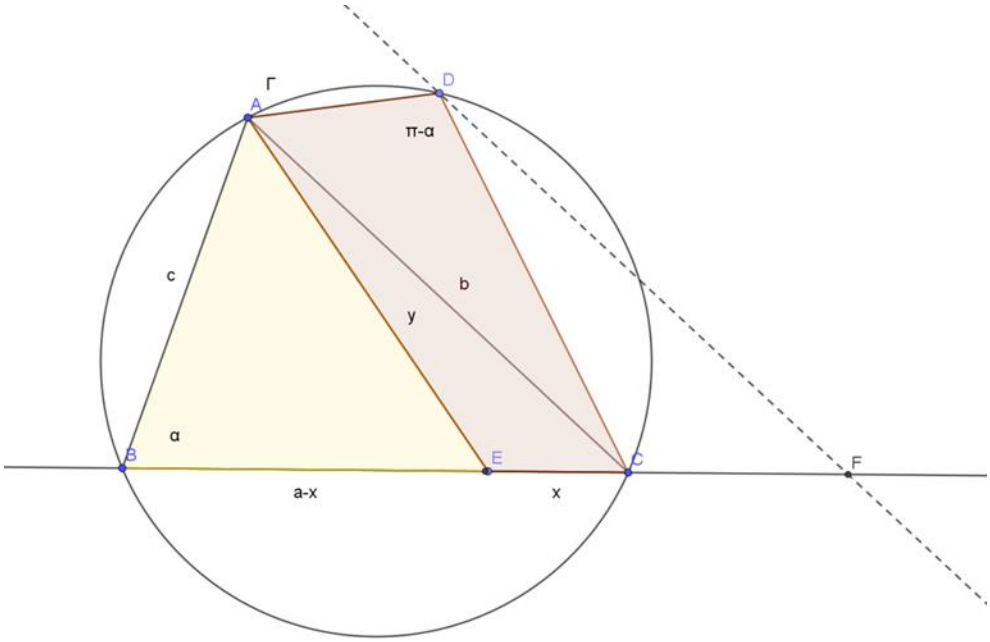
Dans l'énoncé précédent, on a montré comment choisir un point D sur Γ_0 et un point E sur $[BC]$, tels que l'aire du triangle ABE soit égale à l'aire du quadrilatère $AECD$.

Dans cette seconde partie, on demande comment choisir ces points D sur Γ_0 et E sur $[BC]$, pour que **de plus** le triangle ABE et le quadrilatère $AECD$ aient le même périmètre ?

Solution

Cet énoncé n'a pas eu beaucoup de succès, je n'ai pas reçu de réponse. Je vous propose ma solution.

Retour au sommaire



On note a, b, c les longueurs BC, AC, AB, x la longueur EC et y la longueur AE. Par ailleurs on note α une mesure de l'angle géométrique $\widehat{ABC}$.

$périmètre(ABE) = c + (a - x) + y$ et $périmètre(ADCE) = AD + DC + x + y$

Donc $périmètre(ABE) = perimètre\ (ADCE)$ équivaut à $c + (a - x) + y = AD + DC + x + y$

Ce qui donne $AD + DC = c + (a - 2x)$ (*)

Or $aire(ABE) = \frac{1}{2}c(a - x)\sin\alpha$

De plus $aire(ADCE) = aire(ABC) - aire(ABE) + aire(ADC)$

Donc $aire(ADCE) = \frac{1}{2}ac\sin\alpha - \frac{1}{2}(a - x)c\sin\alpha + \frac{1}{2}AD \times DC\sin(\pi - \alpha)$

Or $aire(ABE) = aire(ADCE)$;

Donc $\frac{1}{2}c(a - x)\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\alpha - \frac{1}{2}(a - x)c\sin\alpha + \frac{1}{2}AD \times DC\sin(\pi - \alpha)$.

On en déduit après simplification que : $2c(a - x) = ac + AD \times DC$,

Ce qui donne $AD \times DC = c(a - 2x)$ (**)

Des relations (*) et (**), les longueurs AD et DC sont les solutions de l'équation

$$X^2 - \big(c + (a - 2x)\big)X + c(a - 2x) = 0$$

Dont les solutions sont évidemment c et $(a - 2x)$

En conclusion :

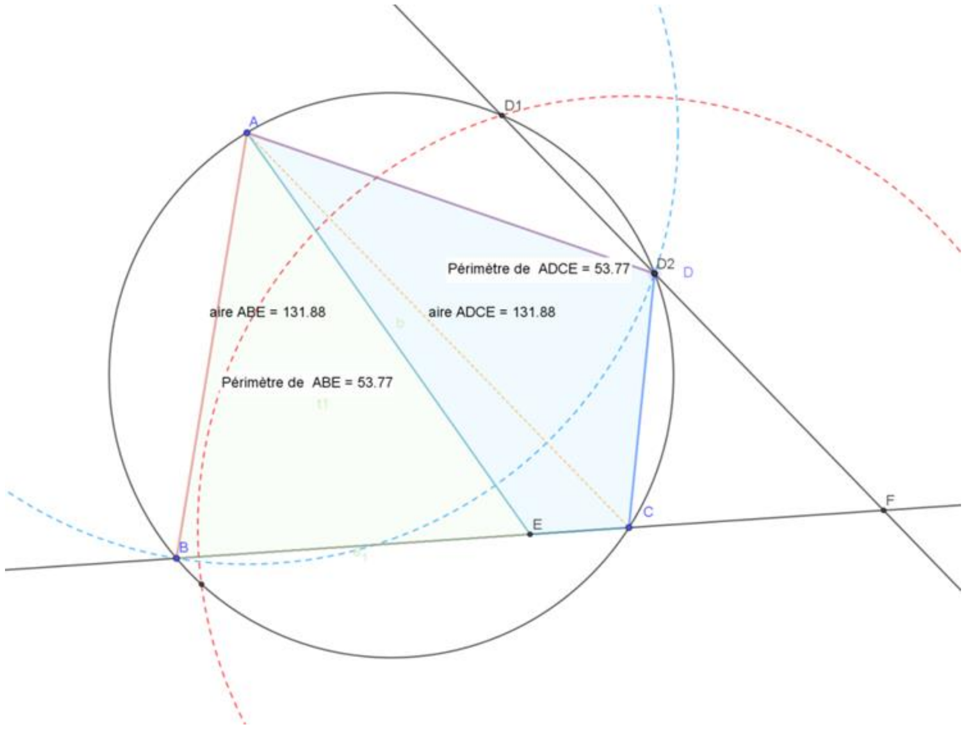
- On trace les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de centre A et C et de rayon AB.
- Le ou les points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ avec Γ_0 sont les points D solution(s) du problème.
- On trace la ou les parallèles à la droite (AC) passant par D ; elle(s) coupe(nt) la droite (BC) en F. Pour chacune des positions de D, le point E est le milieu du segment $[BF]$.

Retour au sommaire

Remarques :

- On rappelle (voir première partie) que Γ_1 et Γ_2 sont les deux arcs inclus dans Γ_0 et intérieurs au quadrilatère (éventuellement dégénéré) $AA'C'C$; il y a des solutions si $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \cap (\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2) \neq \emptyset$ Il y a des solutions si $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \cap (\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2) \neq \emptyset$.
- Quand il y a deux positions pour le point D, on vérifie aisément que les points solutions sont symétriques par rapport à la médiatrice de $[AC]$, les points F et E sont donc uniques.

J'aurais aimé trouver une solution « purement géométrique », mais mes recherches sont restées vaines …



Retour au sommaire