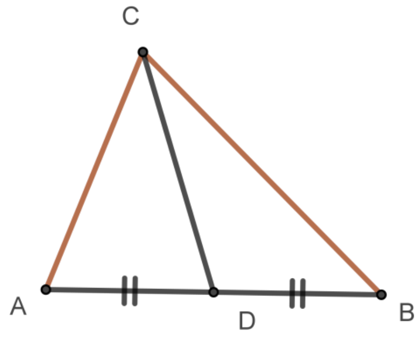
ÉTUDE MATHÉMATIQUE

THÉORÈME D'APOLLONIUS

Fathi Drissi
Collège Louis Armand, Moulins-lès-Metz

Énoncé

Soient ABC un triangle quelconque et D le milieu de [AB].



On a alors la relation suivante :

$$AC^2 + BC^2 = 2AD^2 + 2CD^2 \quad (1)$$

Ou encore :

$$AC^2 + BC^2 = \frac{1}{2}AB^2 + 2CD^2 \quad (2)$$

Remarque

Ce théorème est aussi appelé le premier théorème de la médiane et il est équivalent à l'identité du parallélogramme : « *Dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des quatre côtés est égale à la somme des carrés des longueurs des deux diagonales.* »

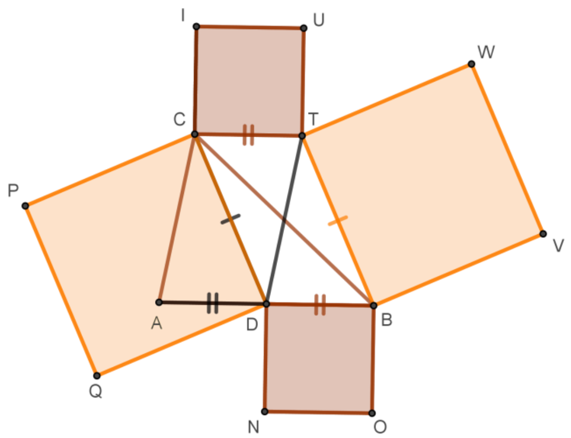


Fig. 1

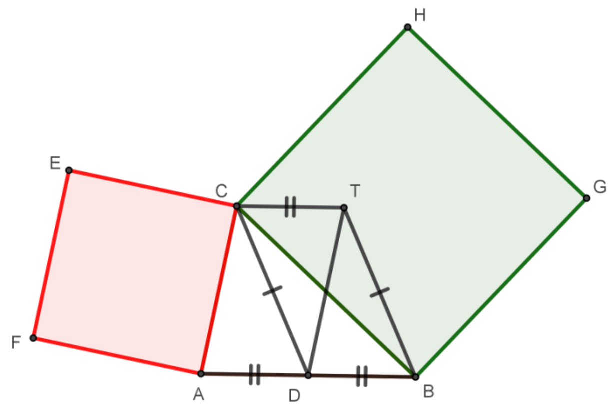


Fig. 2

En effet, si l'on considère le point T tel que BDCT soit un parallélogramme, BOND, CIUT, DCPQ et BTWV les carrés construits sur les côtés et à l'extérieur du parallélogramme BDCT, et les carrés ACEF et BCHG construits sur les côtés [AC] et [BC] et à l'extérieur du triangle ABC, la relation (1) est équivalente à :

$$\mathcal{A}ire(ACEF) + \mathcal{A}ire(BCHG) = 2\mathcal{A}ire(BOND) + 2\mathcal{A}ire(DCPQ)$$

De plus, BDCT étant un parallélogramme et D le milieu de [AB], les segments [CT] et [AD] sont parallèles et sont de même longueur. Donc, ADTC est un parallélogramme et par suite AC=TD.

Retour au sommaire

Par conséquent, démontrer la relation (1) revient à montrer que la somme des aires des carrés construits sur les côtés du parallélogramme BDCT est égale à la somme des aires des carrés construits sur ses diagonales.

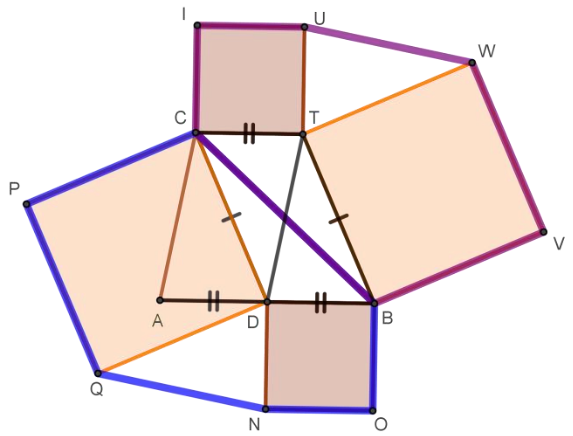
Ce qui suit donne une preuve par équivalence d'aires.

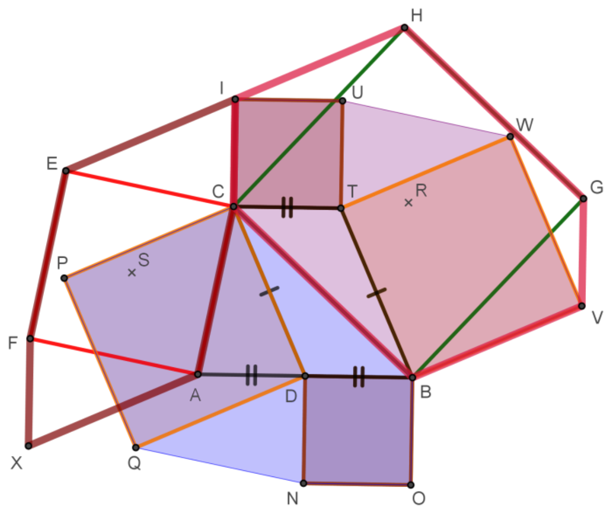
Pour ce faire, on considère d'une part les hexagones BCIUWV et BONQPC. Ils sont symétriques par rapport au centre du parallélogramme BDCT et leurs aires sont égales à :

$$\mathcal{A}ire(DCPQ) + \mathcal{A}ire(BOND) + 2\mathcal{A}ire(BCD)$$

En effet, les triangles DNQ et ACD ont un angle de même mesure, $\widehat{NDQ} = \widehat{ADC} = 90° - \widehat{ADQ}$, compris entre deux côtés deux à deux de même longueur, CD=DQ et AD=DN, donc ils sont isométriques.

De plus, [CD] étant une médiane du triangle ABC, les triangles ACD et BCD ont la même aire.





On considère d'autre part, les hexagones BCIHGV et ACIEFX où X est le symétrique de I par rapport à S centre du carré ACEF.

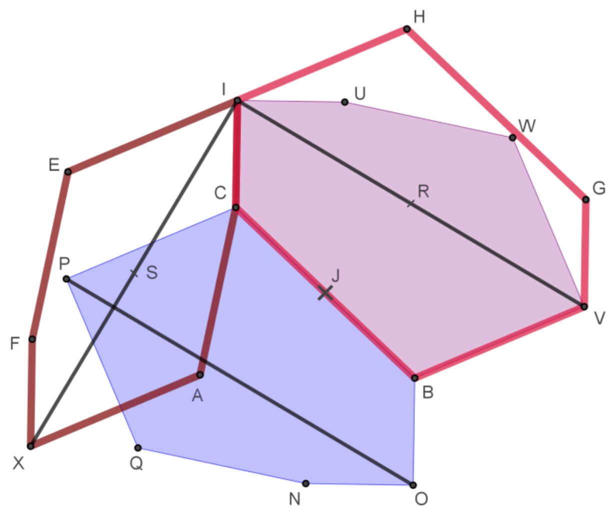
L'hexagone ACIEFX est composé du carré ACEF et des triangles CEI et AFX avec S son centre de symétrie.

Le triangle CEI est l'image du triangle ACD par la rotation de centre S, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et dans le sens direct. Donc, l'aire de ACIEFX est égale à la somme de l'aire du carré ACEF et du double de l'aire du triangle ACD.

Quant à l'hexagone BCIHGV, il est composé du carré BCHG et des triangles CIH et BGV.

Le triangle CIH est l'image du triangle BCD par la rotation de centre R où R est le centre du carré BCHG, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et dans le sens indirect, BGV celle de BCD par la rotation de centre R, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et dans le sens direct. Donc, R est le centre de symétrie de l'hexagone BCIHGV.

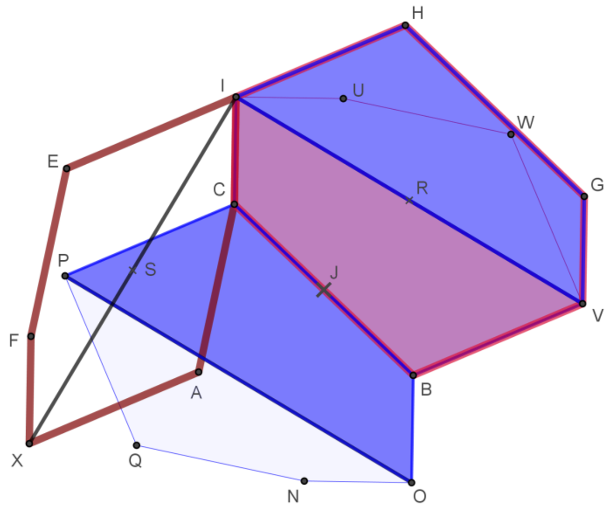
De plus, l'aire de BCIHGV est égale à la somme de l'aire du carré BCHG et du double de l'aire du triangle BCD.



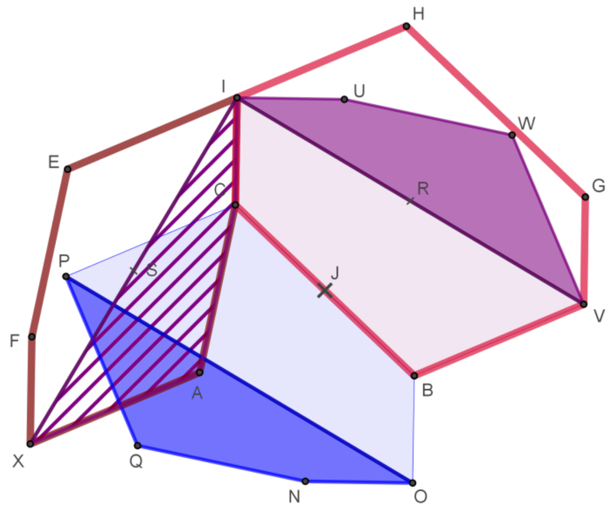
Ainsi, démontrer la relation (1) revient à montrer que la somme des aires des hexagones BONQP et BCIUWV est égale à la somme des aires des hexagones ACIEFX et BCIHGV.

Retour au sommaire

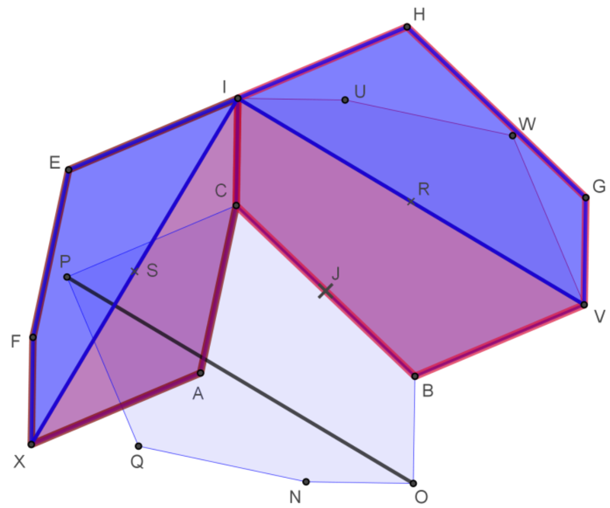
Les quadrilatères BCIV et BCPO sont symétriques par rapport à J où J est le milieu de [BC] (donc J est le centre du parallélogramme BDCT) et BCIV est le symétrique de VIHG par rapport à R puisque R est le centre de symétrie de l'hexagone BCIHGV. Donc BCPO est l'image de VIHG par la translation de vecteur $\overrightarrow{BG}$.



D'une part, les quadrilatères PONQ et VIUW sont symétriques par rapport à J et ACIX est le symétrique de IEFX par rapport à S puisque S est le centre de symétrie de l'hexagone ACIEFX. D'autre part, ACIX est l'image de VIUW par la rotation de centre I, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et dans le sens indirect.



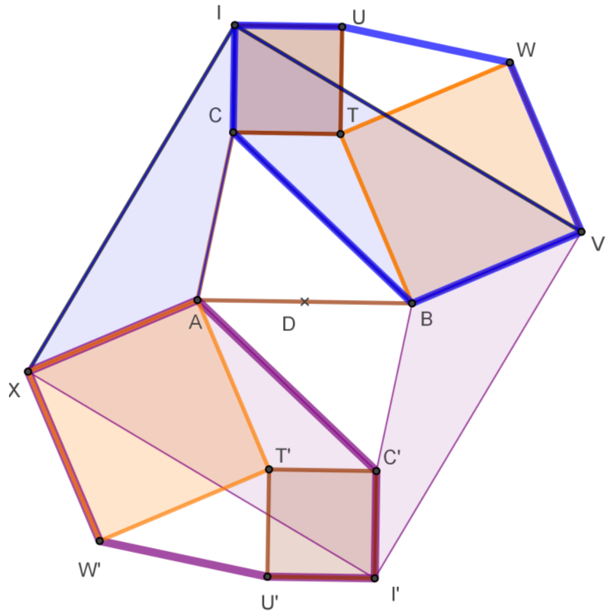
Ceci permet de conclure que la somme des aires des hexagones BONQP et BCIUWV est égale à la somme des aires des hexagones ACIEFX et BCIHGV.



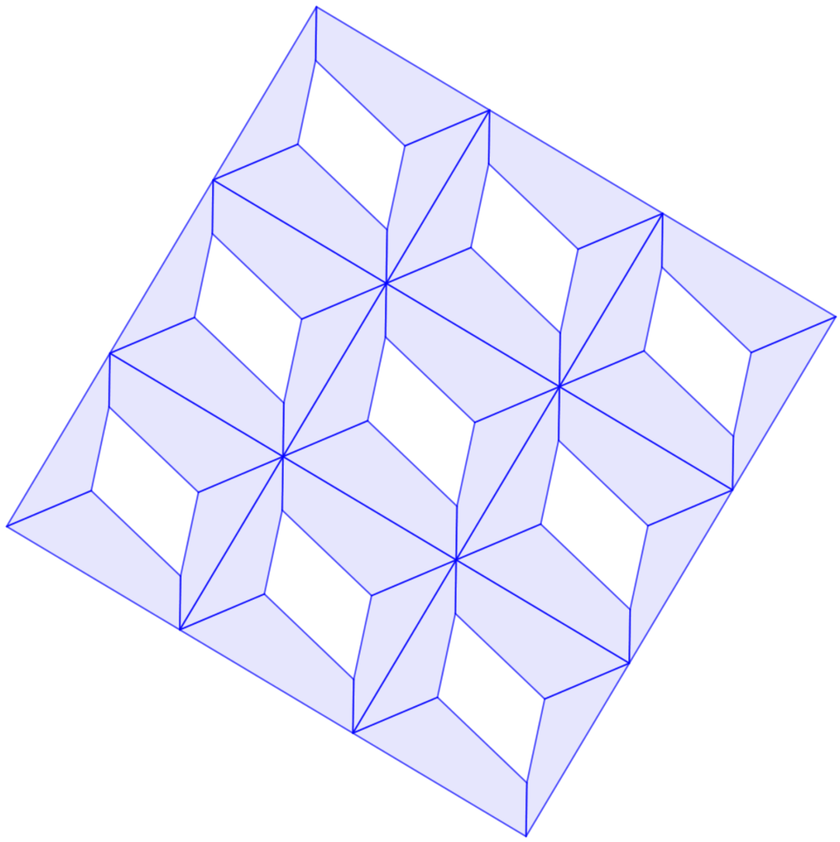
Retour au sommaire

Illustration par pavage

Si au lieu de construire des carrés sur les quatre côtés du parallélogramme BDCT, on en construit seulement sur les côtés [CT] et [BT], puis on construit le symétrique du triangle ABC et de l'hexagone BCIUWV par rapport à D, on obtient alors un motif constitué du carré VIXI' et du parallélogramme ACBC'.



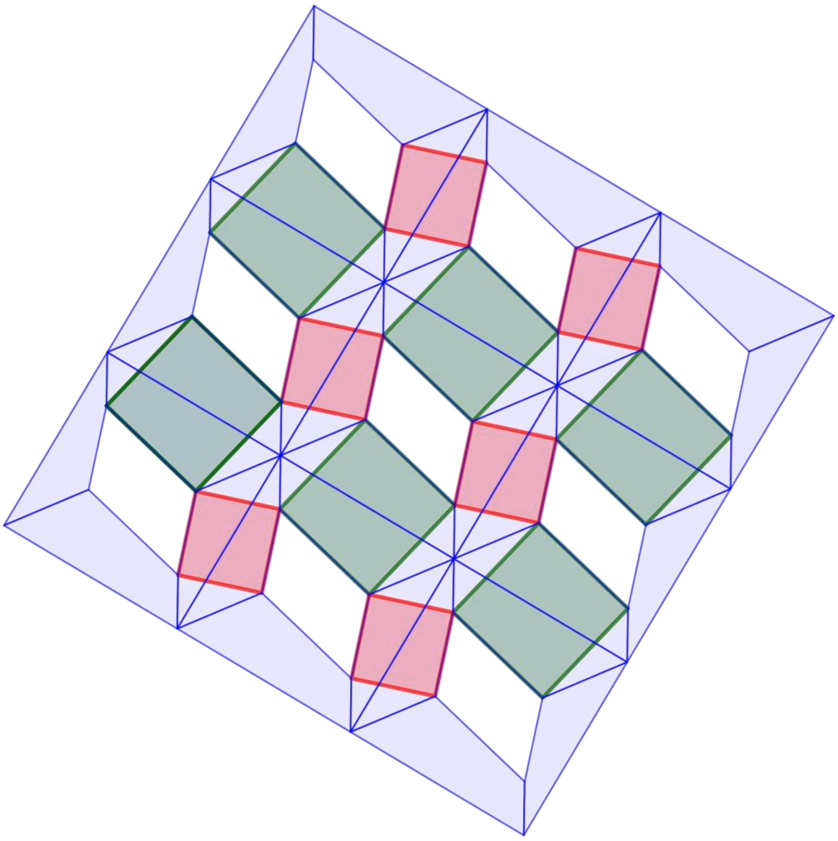
Ce motif permet de réaliser deux pavages, le premier (Pavage 1a) en utilisant successivement les translations de vecteurs $\overrightarrow{IV}$ et $\overrightarrow{IX}$, le second (Pavage 2a) en utilisant des quarts de tour.



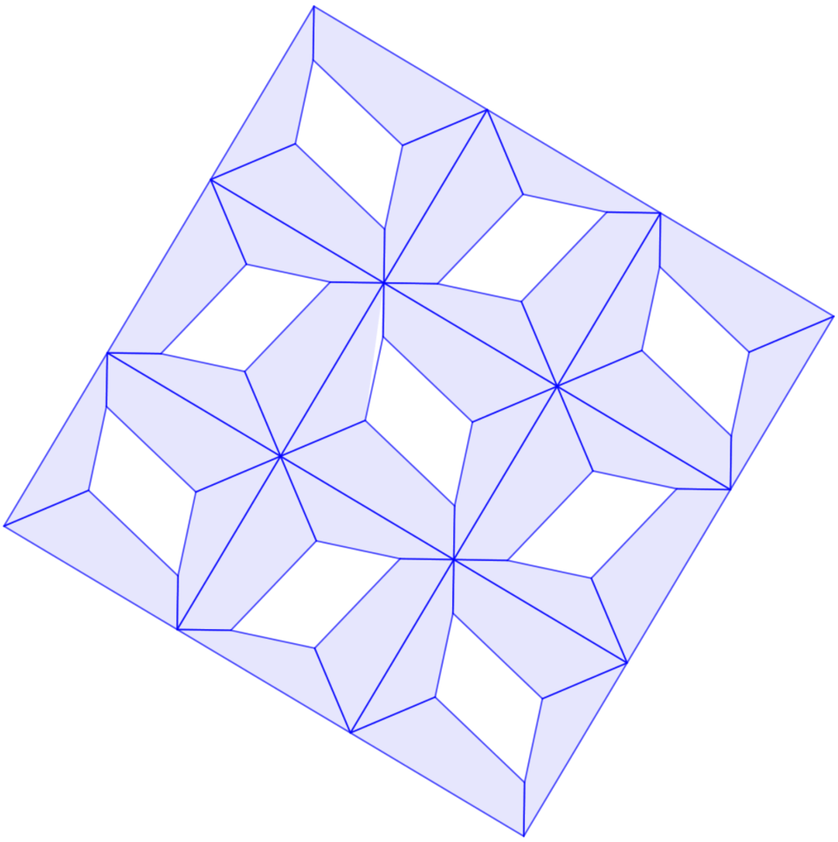
Pavage 1a

Ce premier pavage fait apparaitre un autre pavage (Pavage 1b) par le parallélogramme ACBC' et des carrés construits sur ses quatre côtés, dans lequel chaque carré est entouré de quatre copies de ACBC' et de quatre copies de l′autre carré.

Retour au sommaire



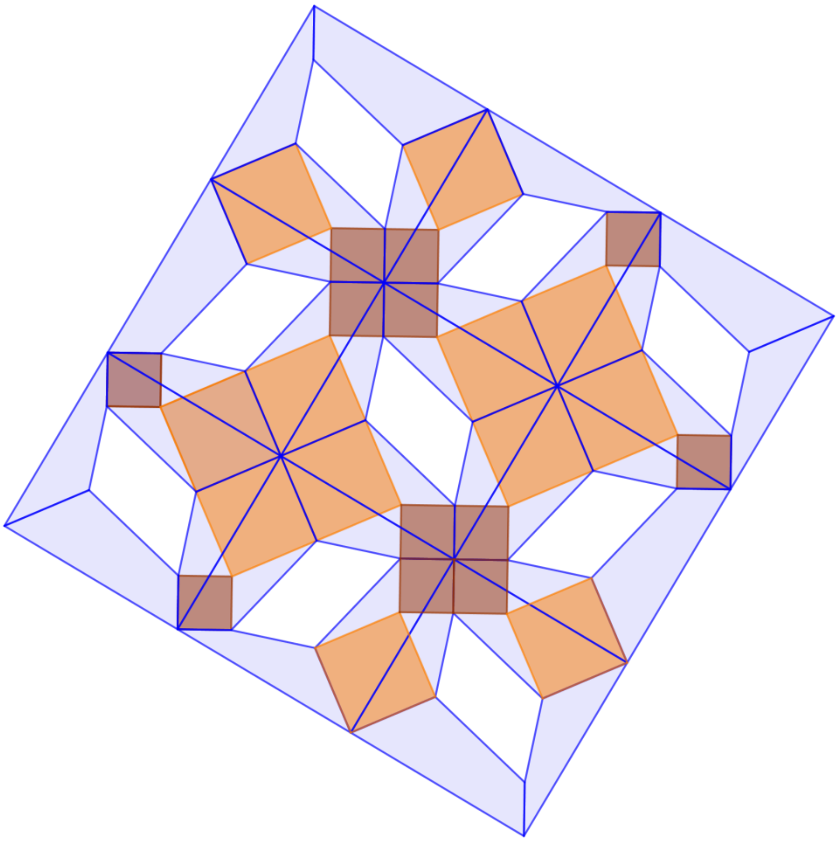
Pavage 1b



Pavage 2a

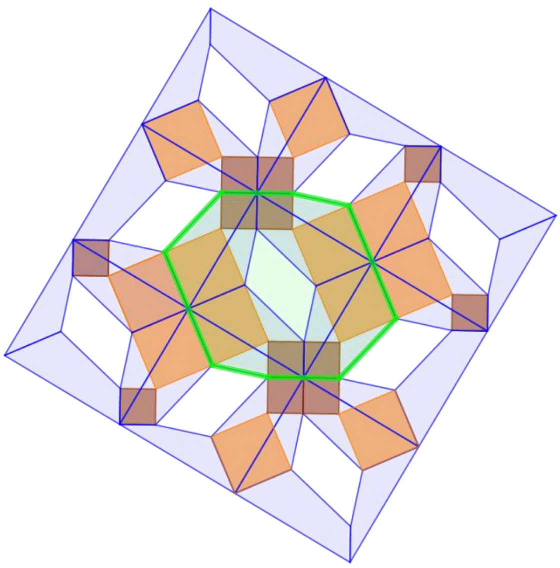
Retour au sommaire

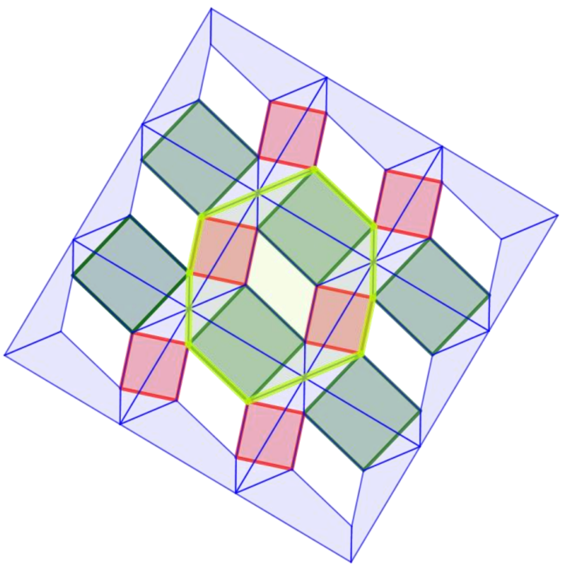
Quant au second pavage, il donne un autre pavage par un parallélogramme dont l'aire est égale au double de l'aire du parallélogramme ACBC', d'un carré de côté AB et d'un carré de côté CC'=2CD.



Pavage 2b

Ces pavages étant obtenus à partir d'une même cellule génératrice, le double de la somme des aires d'un carré rouge et d'un carré vert vaut le quadruple de la somme des aires d'un carré brun et d'un carré orange.





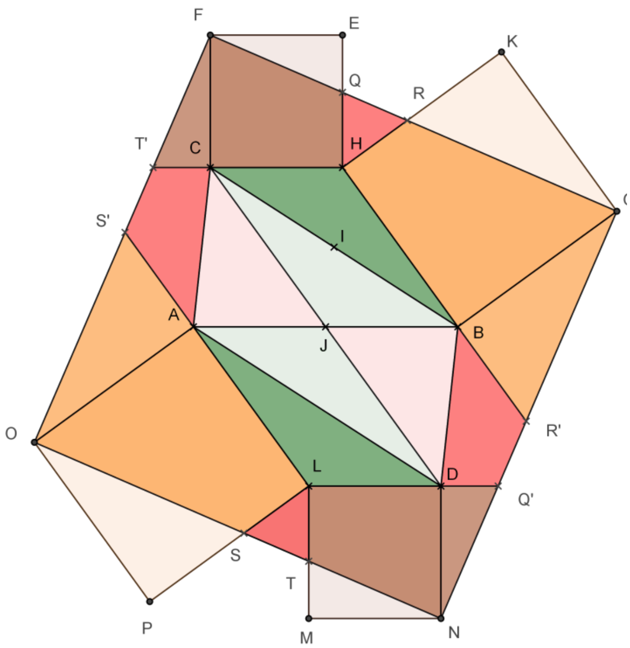
[Retour au sommaire]

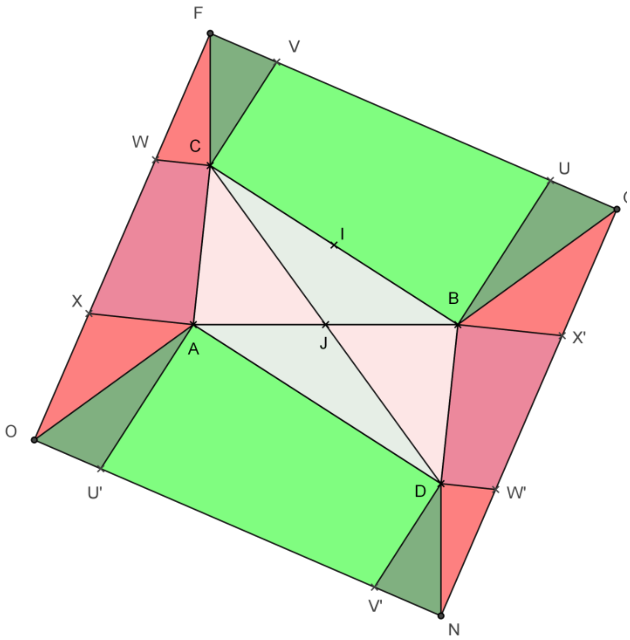
Des puzzles pour faire découvrir le théorème d'Apollonius

Les pavages précédents nous offrent des découpages dont les pièces pourraient être manipulées comme des puzzles.

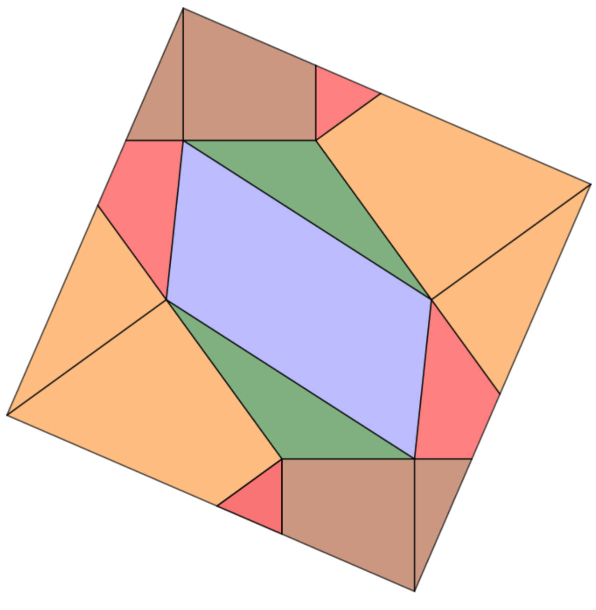
Les pièces du découpage de gauche peuvent être réassemblées en deux parallélogrammes superposables (deux copies de ACBD), deux carrés bruns (deux carrés de côté AJ où J est le milieu de [AB]) et deux carrés orange (deux carrés de côté CJ), et celles du découpage de droite en deux parallélogrammes superposables (deux copies de ACBD), deux carrés verts (deux carrés de côté BC) et deux carrés mauves (deux carrés de côté AC).

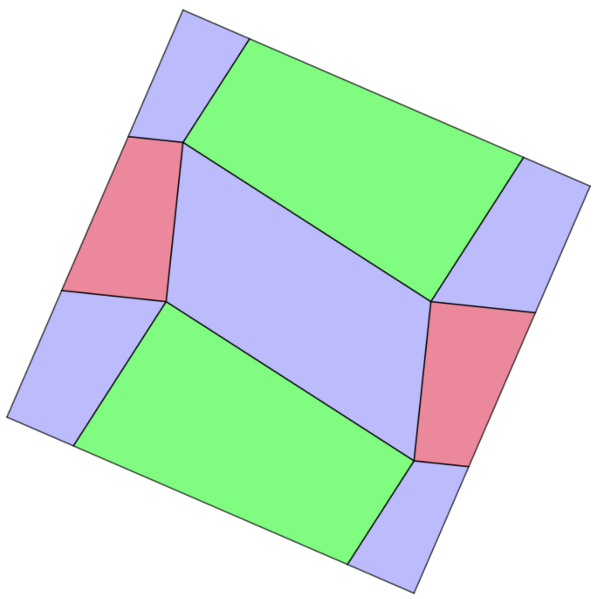
La manipulation de ces pièces pourrait faciliter la découverte d'une relation entre les aires des carrés d'un des deux découpages et celles des carrés de l'autre et donc du théorème d'Apollonius.





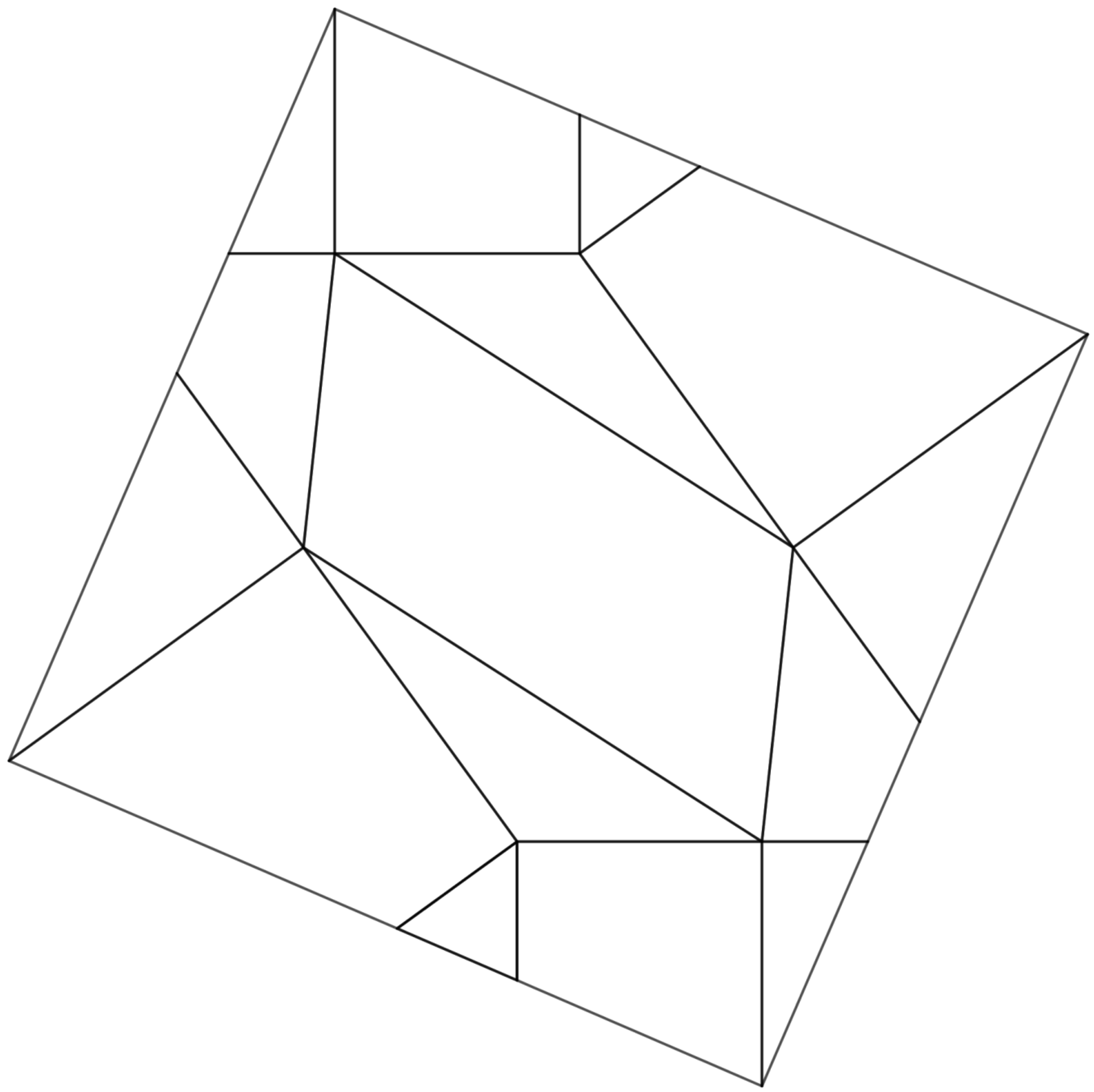
Les pièces des deux découpages, à imprimer, coller sur du carton et découper



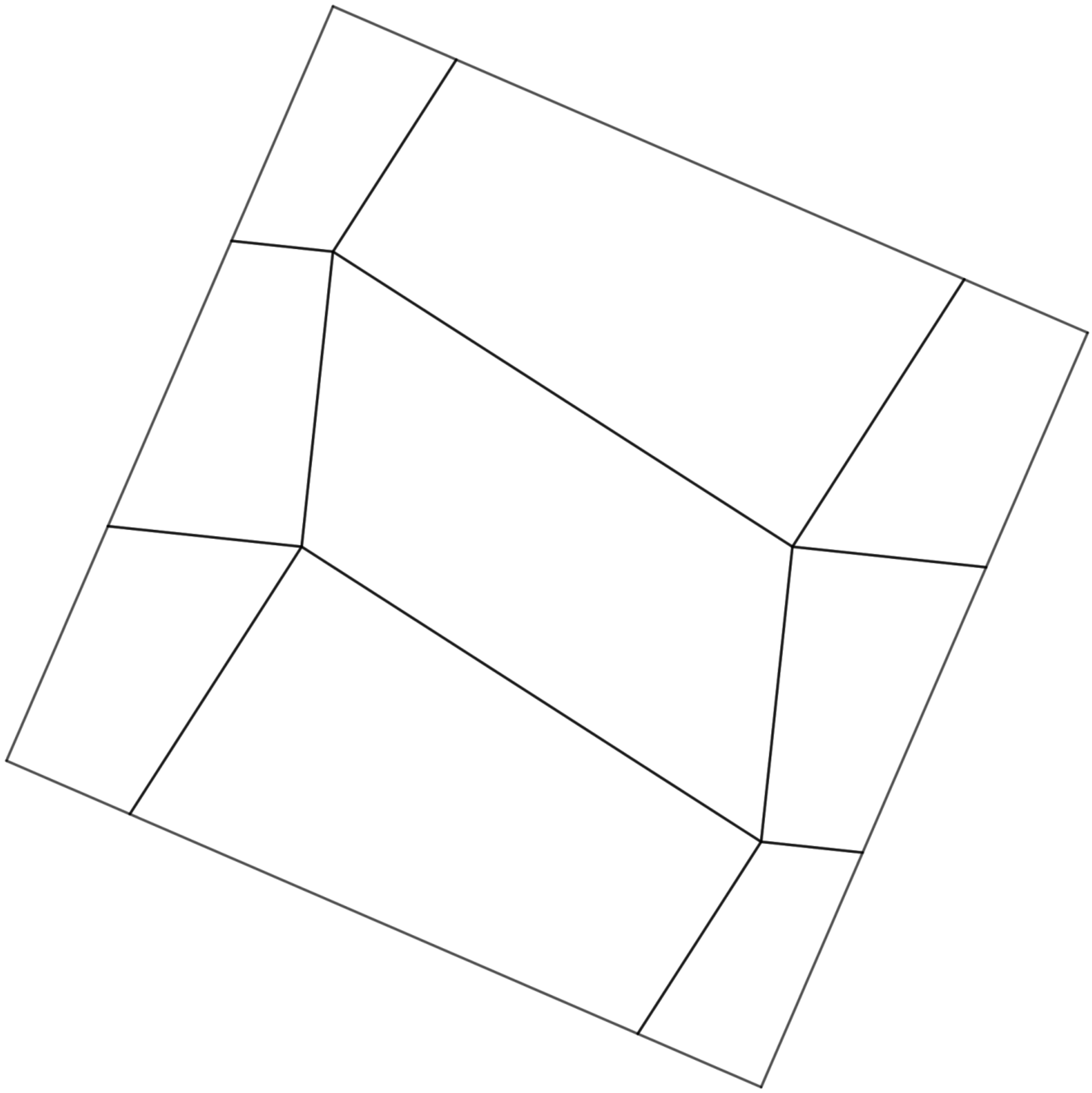


Retour au sommaire

Les pièces en noir et blanc



Retour au sommaire



Retour au sommaire