

PROBLÈME 152

PARTAGEONS (DEUXIÈME PARTIE)

Proposé par [Philippe Févotte](#)*

On note Γ le cercle circonscrit à un triangle ABC , et Γ_0 l'arc de Γ , d'extrémités A et C et ne contenant pas le point B .

Dans l'exercice précédent, dont une solution est proposée ci-dessous dans ce numéro, on a montré comment choisir un point D sur Γ_0 et un point E sur $[BC]$, tels que l'aire du triangle ABE soit égale à l'aire du quadrilatère $AECD$.

Comment choisir ces points D sur Γ_0 et E sur $[BC]$, pour que **de plus** le triangle ABE et le quadrilatère $AECD$ aient le même périmètre ?

* J'ai trouvé, écrit sous une autre forme, l'énoncé de cet exercice sur internet, il y a quelques années. Je n'ai pas conservé les références ; toutes mes excuses auprès de l'auteur.

SOLUTION DU PROBLÈME 151

PARTAGEONS (PREMIÈRE PARTIE)

Proposé par [Philippe Févotte](#)*

On note Γ le cercle circonscrit à un triangle ABC , et Γ_0 l'arc de Γ , d'extrémités A et C et ne contenant pas le point B .

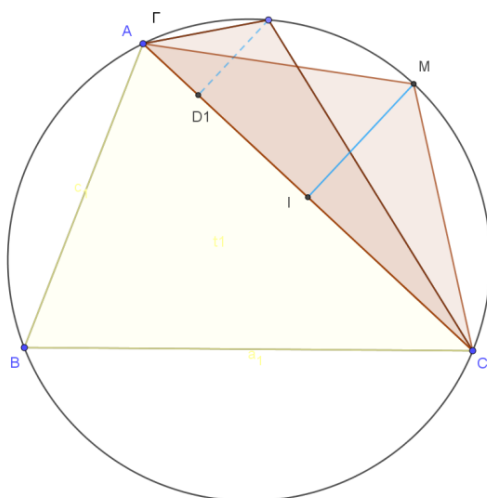
Comment choisir un point D sur Γ_0 tel que l'aire du quadrilatère $ABCD$ soit maximale ?

Comment choisir un point D sur Γ_0 et un point E sur $[BC]$, tels que l'aire du triangle ABE soit égale à l'aire du quadrilatère $AECD$?

Deux solutions ont été proposées, par Jacques Choné et par Fabien Lombard.

J'en propose également une qui diffère des deux autres.

Question 1



$$\text{aire}(ABCD) = \text{aire}(ABC) + \text{aire}(ADC)$$

Lorsque D varie sur le cercle Γ , les triangles ADC ont tous la même base $[AC]$; il faut donc et il suffit que la hauteur du triangle ADC issue de D soit de longueur maximale. C'est-à-dire lorsque D est en M , intersection de Γ avec la médiatrice de $[AC]$.

Fabien Lombard propose de plus une seconde démonstration analytique.

[Retour au sommaire](#)

$\text{aire}(ADC) = DA \times DC \sin(\widehat{ADC}) = DA \times DC \sin(\widehat{ABC})$, les deux angles $\widehat{ADC}$ et $\widehat{ABC}$ étant complémentaires, le quadrilatère $ABCD$ étant inscrit dans le cercle Γ de rayon R .

Il faut donc maximiser le produit $DA \times DC$. Or on a les égalités :

$DC = 2R \sin(\widehat{DAC}) = 2R \sin(\widehat{DBC})$ et $DA = 2R \sin(\widehat{DCA}) = 2R \sin(\widehat{DBA})$, les points A, B, C, D étant cocycliques.

En notant α une mesure de l'angle géométrique $\widehat{ABC}$ et θ est une mesure de l'angle géométrique $\widehat{DAC}$, on a donc $\widehat{DBC} + \widehat{DBA} = \alpha$ et par conséquent $DA \times DC = 4R^2 \sin \theta \sin(\alpha - \theta)$.

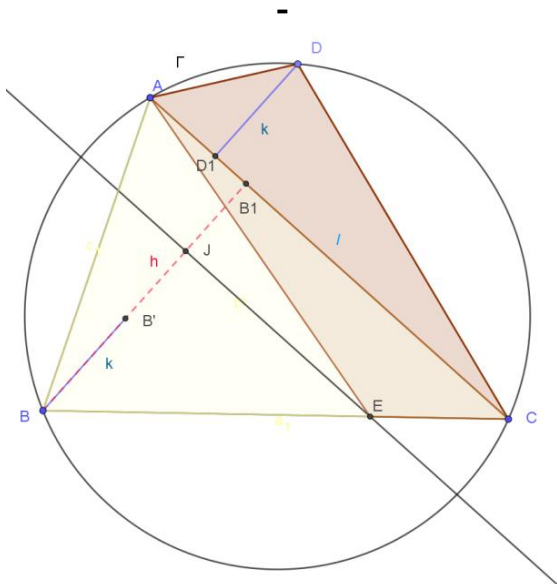
On a donc $DA \times DC = 4R^2 \sin \theta \sin(\alpha - \theta) = 2R^2 (\cos(2\theta - \alpha) - \cos \alpha)$. Ce produit est maximal quand $2\theta - \alpha = 0$, soit $\theta = \frac{\alpha}{2}$.

Dans ce cas le triangle ADC est isocèle et on retrouve bien que D est sur la médiatrice de $[AC]$.

Question 2

Les deux premières solutions proposées s'appuient sur des calculs d'aires.

Solution 1 (Jacques Choné)



Soit B_1 et D_1 les projections orthogonales respectives de B et D sur la droite (AC)

On note $l = AC$ et $h = BB_1$ et on choisit un point D de Γ_0 tel que la distance k de D à (AC) soit inférieure à h .

Soit B' le point du segment $[BB_1]$ tel que $BB' = k$ et J le milieu du segment $[B'B_1]$; soit E le point d'intersection de la droite (BC) avec la parallèle à (AC) passant par J .

On va montrer que ce point E est solution du problème posé.

En remarquant que $JB_1 = \frac{h-k}{2}$,

$$\text{aire}(ABE) = \text{aire}(ABC) - \text{aire}(AEC)$$

$$\text{donc } \text{aire}(ABE) = \frac{1}{2}lh - \frac{1}{2}l\left(\frac{h-k}{2}\right)$$

$$\text{On a donc } \text{aire}(ABE) = \frac{1}{2}lk + \frac{1}{2}l\left(\frac{h-k}{2}\right),$$

$$\text{soit } \text{aire}(ABE) = \text{aire}(ADC) + \text{aire}(AEC)$$

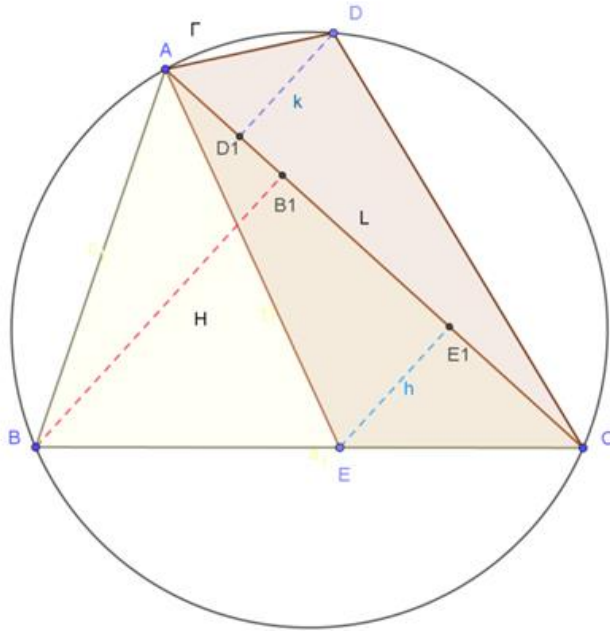
$$\text{et donc } \text{aire}(ABE) = \text{aire}(AECD).$$

Solution 2 (Fabien Lombard)

On choisit un point D de Γ_0 ainsi qu'un point E de $[BC]$.

Soient B_1 , D_1 et E_1 les projections orthogonales respectives de B , D et E sur la droite (AC) .

On note $H = BB_1$, $h = EE_1$, $k = DD_1$ et $L = AC$. On a donc



$$\text{aire}(ABE) = \text{aire}(ABC) - \text{aire}(AEC)$$

$$\text{aire}(ABE) = \frac{1}{2}LH - \frac{1}{2}Lh = \frac{1}{2}L(H - h)$$

$$\text{aire}(AECD) = \text{aire}(ADC) + \text{aire}(AEC)$$

$$\begin{aligned} \text{aire}(AECD) &= \frac{1}{2}Lk + \frac{1}{2}Lh \\ &= \frac{1}{2}L(k + h) \end{aligned}$$

Par conséquent, si on veut que $\text{aire}(AECD) = \text{aire}(ABE)$, il est nécessaire (et suffisant) de choisir D et E tels que soient vérifiées les relations : $H - h \geq 0$, $H - h = k + h$

On a donc $h = \frac{1}{2}(H - k)$, ce qui impose $k \leq H$.

Si l'angle $\widehat{ABC}$ est aigu, la condition est toujours vérifiée, on peut choisir un point D quelconque sur l'arc Γ_0 . Si l'angle $\widehat{ABC}$ est obtus, le point D doit appartenir à la bande de bord (AC) , extérieure au triangle ABC et de largeur H .

Le point D étant choisi, on construit le point E sur $[BC]$, tel que $h = \frac{1}{2}(H - k)$.

Pour cela il suffit de procéder comme dans la démonstration proposée par Jacques Choné.

On construit le point B' du segment $[BB_1]$ tel que $BB' = k$ et J le milieu du segment $[B'B_1]$; E est le point d'intersection de la droite (BC) avec la parallèle à (AC) passant par J .

dégénéré) $AA'C'C$, E appartient au segment $[BC]$ si et seulement si D appartient à $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

On remarque comme précédemment que si l'angle $\widehat{ABC}$ est aigu, la condition est toujours vérifiée, on peut alors choisir un point D quelconque sur l'arc Γ_0

En conclusion

Pour tout D appartenant à $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, le problème a une solution. Pour cela à chaque point D choisi, on construit la parallèle à la droite (AC) passant par D . Elle coupe la droite (BC) en F . Le point E correspondant est le milieu de segment $[BF]$.

Remarque

Cette solution nous donne une construction du point E plus rapide que dans les deux premières propositions.

Jacques Choné précise que sa démonstration est inspirée du [très bel article](#) proposé sur le site du [CNRS Images des maths](#).

On y retrouve également en partie celle que j'ai développée.

VIE DE LA RÉGIONALE

APPEL À ATELIERS

La journée Régionale Lorraine 2023 aura lieu le mercredi 12 avril à Villers-lès-Nancy.

Nous avons besoin de vous !

N'hésitez pas à contribuer à cette Journée en animant un atelier. Tous les thèmes sont permis ; *de la maternelle à l'université*, venez raconter, partager, discuter, présenter, interroger, échanger, débattre...

Des activités que vous avez réalisées avec votre classe, un travail avec d'autres collègues, un atelier hors discipline, une étude mathématique, un projet sont tous très intéressants à partager avec vos collègues.

Les ateliers permettent d'aborder de très nombreux sujets et sont un lieu d'échanges privilégiés entre un (ou deux) animateur(s) et les participants, toujours motivés.

Les ateliers sont prévus sur des plages d'une heure et quart.

À vous de choisir !

- des Ateliers communication sous la forme d'un exposé suivi d'un débat
- des Ateliers TP où les participants sont plus actifs

Certains seront à destination de tous, d'autres pour un public plus ciblé. En tout cas, ils permettront à coup sûr à chacun de satisfaire son envie de découvrir, approfondir ou partager.

Vos propositions sont à adresser à [Valérie Pallez](#) ou/et [Christelle Kunc](#).

[Retour au sommaire](#)