

ÉTUDE MATHÉMATIQUE**TRISECTION DU CARRÉ ET REPTUILE D'ORDRE 3**

Groupe Jeux de l'APMEP Lorraine

Fathi Drissi

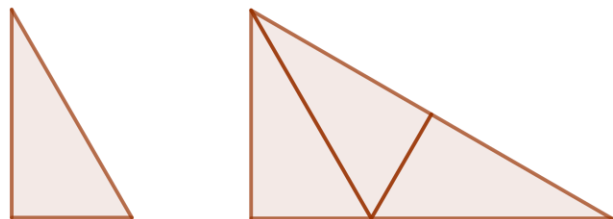
Définition d'un reptile

Un *reptile* (ou reptuile) est un polygone qui possède la propriété d'être reproductible, à une échelle supérieure ou inférieure, par juxtaposition (sans trou ni chevauchement) ou par découpe d'un certain nombre de copies identiques.

Tout nombre de copies permettant de retrouver un agrandissement ou une réduction du polygone de départ est appelé ordre du reptile.

Exemple

Les demi-triangles équilatéraux sont des reptuiles d'ordre 3.

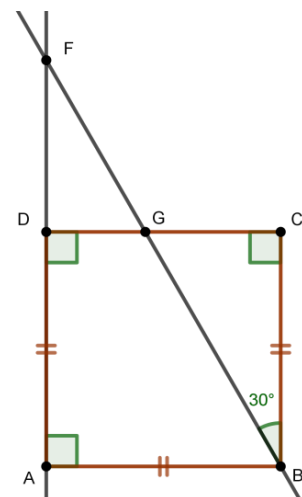


Un carré n'est pas un reptuile d'ordre 3, c'est-à-dire qu'il ne peut pas être découpé en trois carrés superposables.

Alors comment découper un carré en un nombre minimal de morceaux qui, une fois réassemblés, formeront trois carrés superposables ?

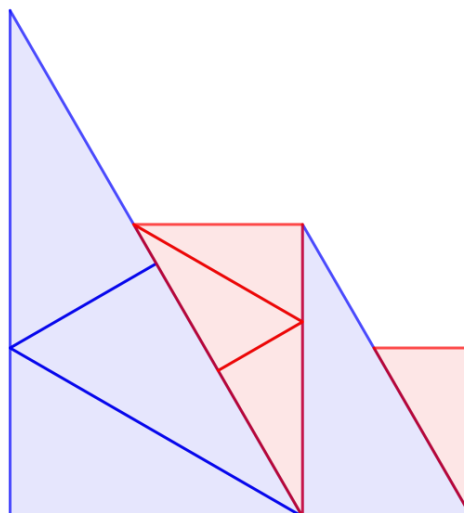
Soient ABCD un carré, G un point de [CD] tel que $\widehat{CBG} = 30^\circ$ et F le point d'intersection de (AD) et (BG).

Le pentagone ABCGF obtenu n'est pas un reptuile d'ordre 3, mais il est composé de deux demi-triangles équilatéraux qui le sont.

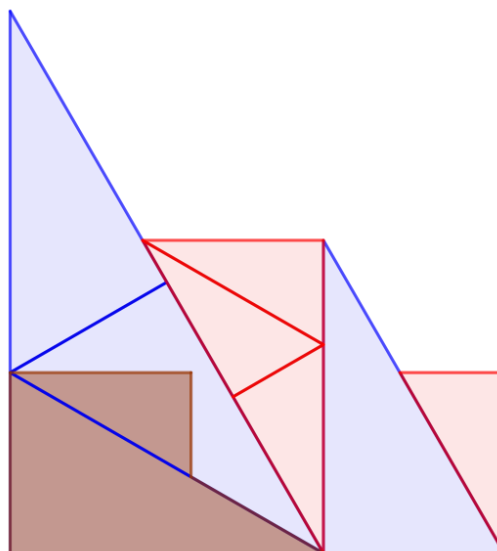


[Retour au sommaire](#)

On peut donc obtenir une triplication de ce pentagone en six pièces comme l'illustre le dessin ci-contre.



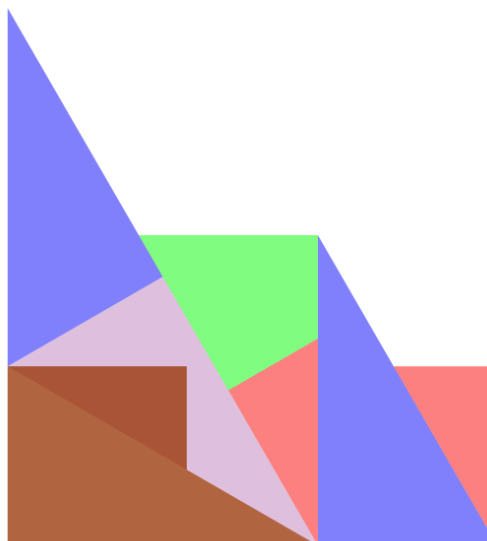
Il est aussi possible de réaliser une triplication en six pièces dont l'une est une copie du pentagone.



Peut-on avoir une triplication du pentagone en moins de six pièces ?

Comme le montre le dessin ci-contre, la réponse est oui. Il suffit de regrouper les deux demi-triangles équilatéraux rouges formant un cerf-volant vert et qui s'assemblent avec la pièce violette pour former un des trois pentagones.

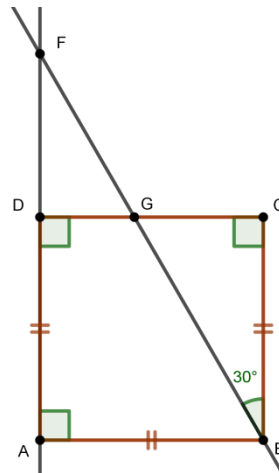
Y a-t-il une relation entre le nombre de pièces, le nombre des reptuiles et leur ordre ?



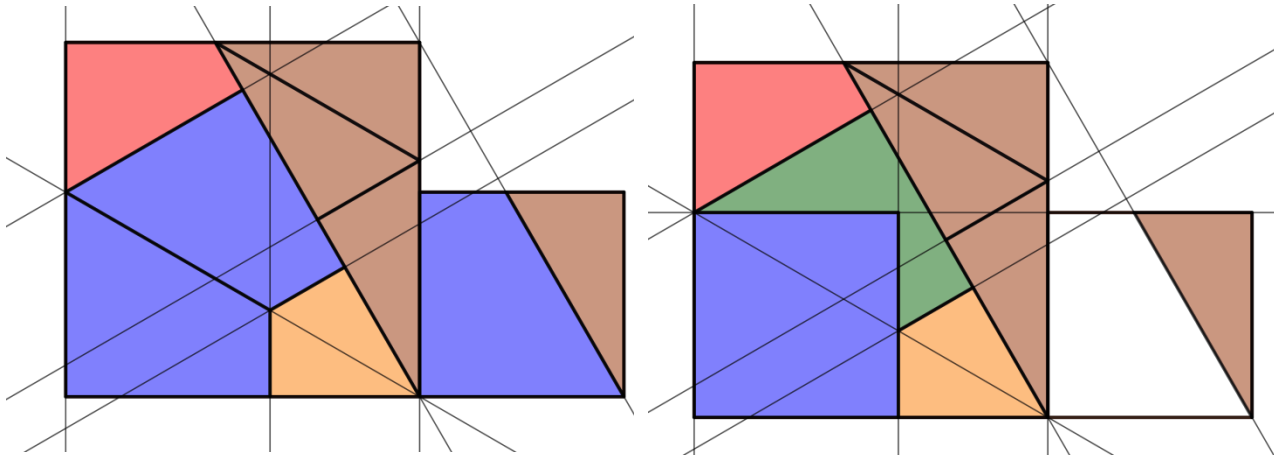
[Retour au sommaire](#)

Trisection du carré

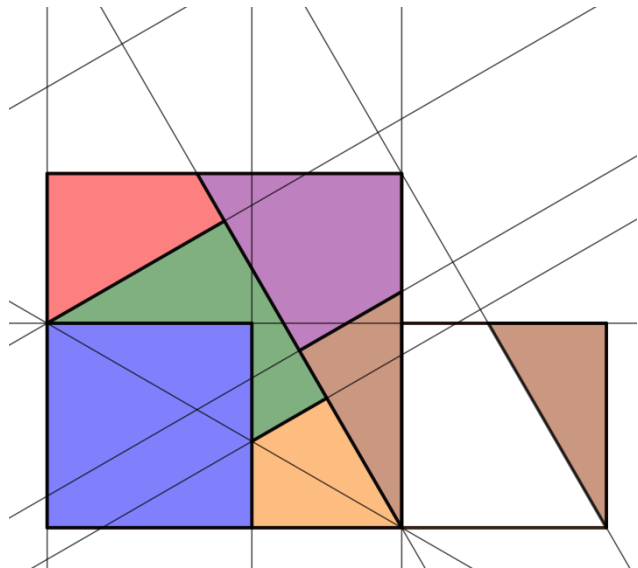
On considère maintenant le carré ABCD comme une troncature du pentagone ABCGF (on lui enlève le demi-triangle équilatéral DFG).



Des triplications précédentes du pentagone ABCGF, on peut déduire ces trisections du carré en sept pièces.



La dernière trisection peut être optimisée en regroupant deux des trois triangles bruns, ce qui permet d'obtenir cette trisection en six morceaux.



Peut-on encore minimiser le nombre de morceaux et obtenir une trisection en cinq pièces ?