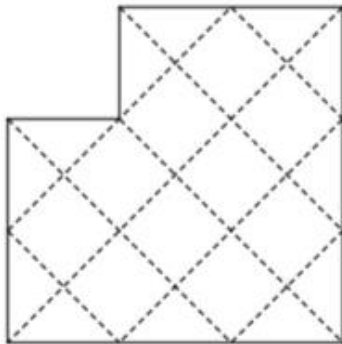


MATHS ET DÉCOUPAGES**POLYGONES ÉCORNÉS (1)**

Groupe Jeux de l'APMEP Lorraine

Le défi proposé à des élèves de troisième et de seconde

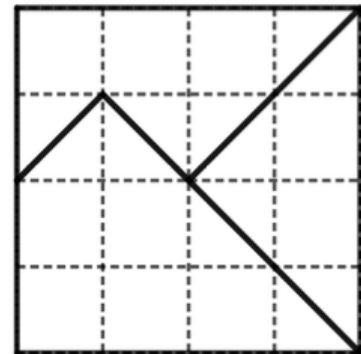
L'exercice 8 du [rallye 2022](#) organisé par notre Régionale incitait les élèves à retrouver le découpage d'un carré écorné pour réaliser un nouveau carré.

Exercice 8 : Puzzle

Il faut partager ce polygone (« carré écorné ») en 3 parties afin de reconstituer un carré de même aire.

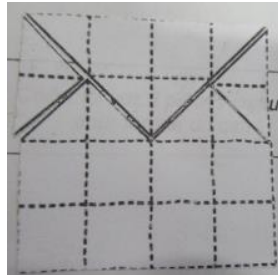
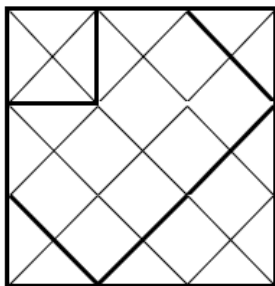
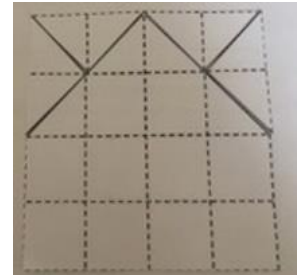
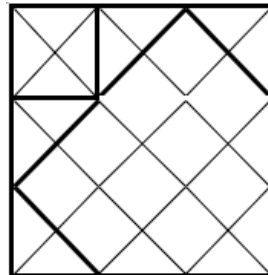
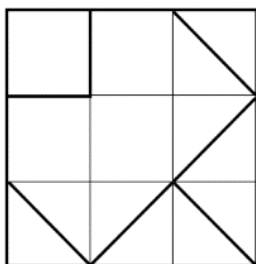
Exercice 8 : Puzzle

En prenant un carreau comme unité d'aire, l'aire du carré est de 16 donc un côté mesurera 4.



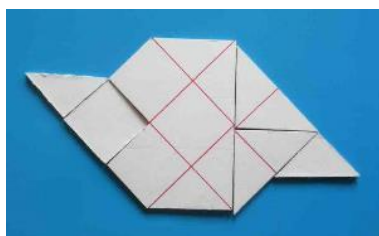
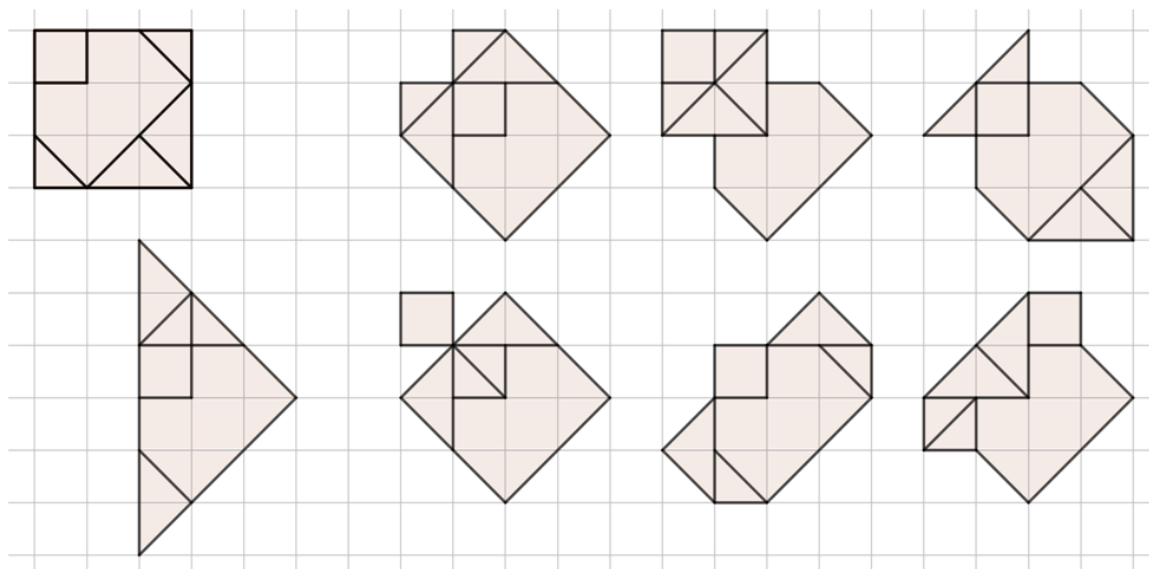
Le découpage en trois pièces du carré écorné n'a pas été trouvé (Sur notre site, sont accessibles une [activité de construction](#) et une autre pour de [très jeunes enfants](#)).

Deux propositions ont cependant retenu l'attention des correcteurs et correctrices du rallye.

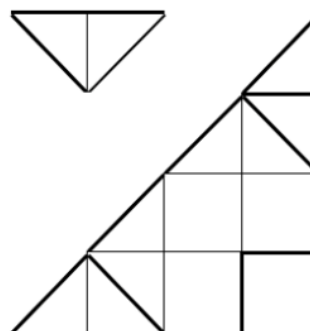
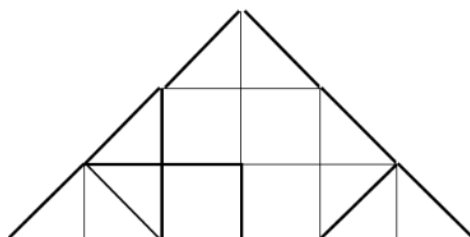
Découpage en quatre pièces**Découpage en cinq pièces****Un autre carré écorné**

Ce découpage est de la même famille que le premier imaginé par des élèves. Il est formé de six pièces ayant toutes au moins un axe de symétrie.

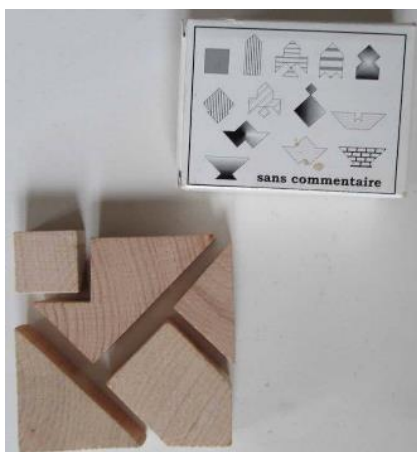
Recouvrir des figures possédant un élément de symétrie est envisageable.



Les pièces nous fournissent un triangle écorné. Un [défi](#) les utilisant est proposé sur notre site.

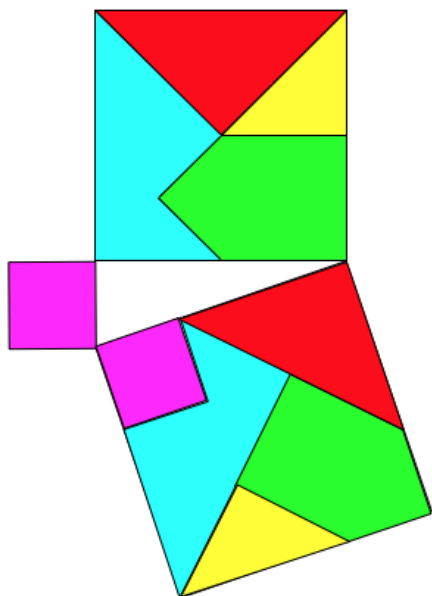


Un autre membre de la famille des « carrés écornés »



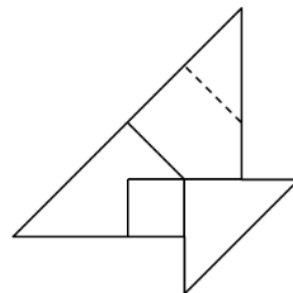
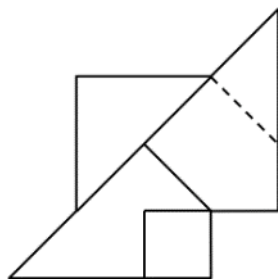
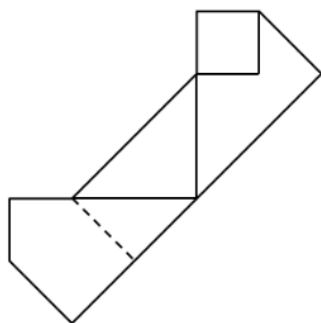
Le découpage proposé par Manfred Pietsch se retrouve dans le carré du puzzle « sans commentaire » commercialisé par kubi-games, Allemagne.

Acheté dans un magasin de jeux à Saint-Max (54), ce puzzle vendu sous le nom de « puzzle de Saint-Max » est le support d'activités dans la brochure « Jeux 9 » de l'APMEP.



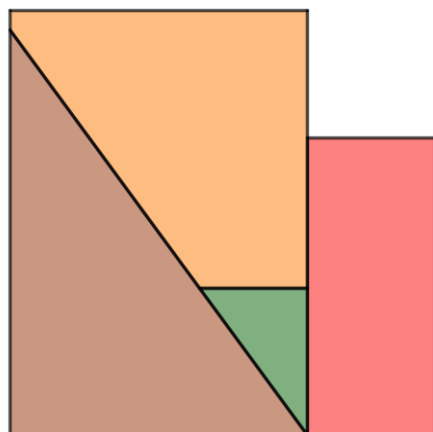
Le puzzle « sans commentaire » (ou de Saint-Max) et le puzzle de Manfred Pietsch permettent tous les deux une visualisation du théorème de Pythagore.

Le puzzle « sans commentaire » et le puzzle de Manfred Pietsch permettent tous les deux la réalisation de polygones à pourtour symétrique. Le carré découpé en est un autre exemple.



Ces trois exemples ne sont que le début d'une recherche à poursuivre...

Un ensemble de cinq pièces

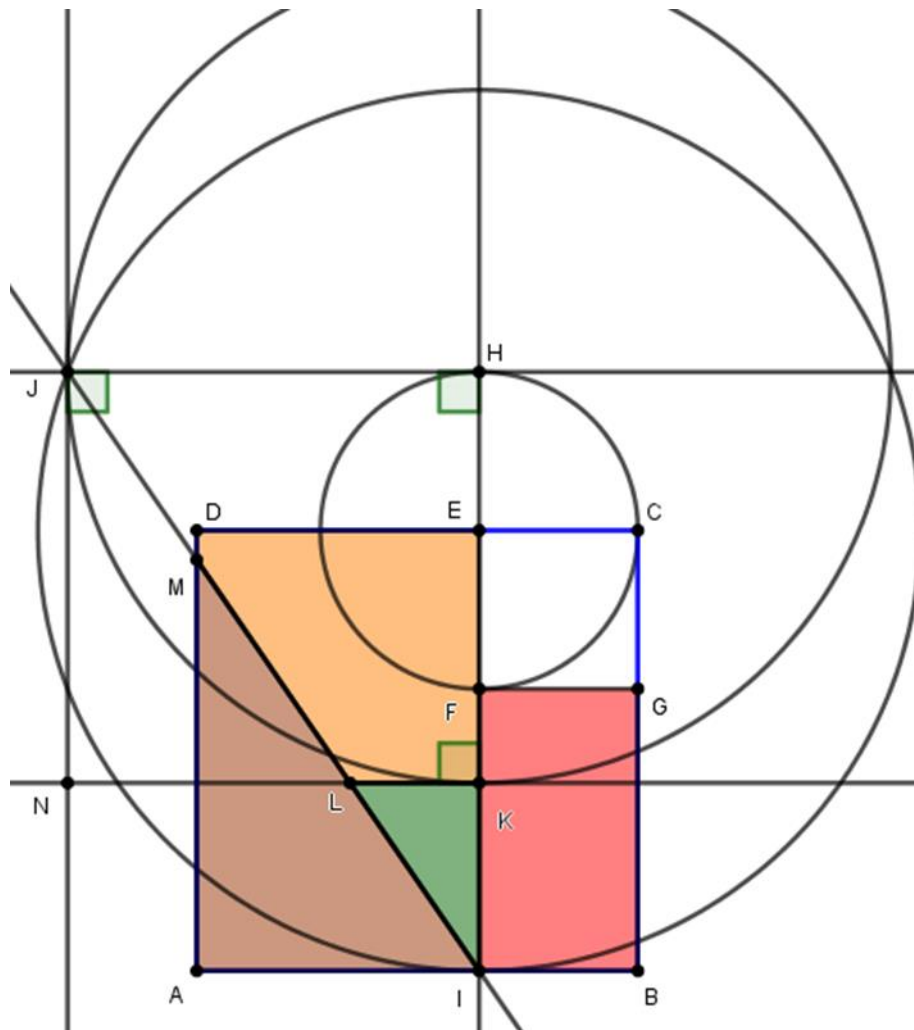


Les cinq pièces ci-contre permettent de réaliser un grand carré.

En mettant de côté le carré bleu, réaliser un carré à l'aide des pièces restantes.

Pour construire le puzzle

ABCD et CEFG sont des carrés. Le point E est sur [CD] tel que $CE \leq \frac{3}{5}CD$.



- 1) Tracer la droite (EF). Elle coupe [AB] en I.
- 2) Tracer le cercle de centre E passant par C. Il recoupe (EF) en H.
- 3) Tracer la droite (d) perpendiculaire à (EF) passant par H.
- 4) Tracer le cercle de centre E passant par I. Il coupe (d) en J tel que J et C ne soient pas du même côté par rapport à (EF).
- 5) Tracer le cercle de centre H passant par J. Il coupe [EF] en K.
- 6) Tracer la droite (IJ). Elle coupe [AD] en M.
- 7) Tracer la perpendiculaire à (EF) en K. Elle coupe (IJ) en L.

Ce découpage nous donne un beau problème pour les 1ère Spé Maths ou comme défi pour les lecteurs du Petit Vert. La construction étant donnée, il pourrait être demandé :

Démontrer que JHKN est un carré et que $JH^2 + CE^2 = JE^2$.

Démontrer que $CE \leq \frac{3}{5}DE$.

Démontrer que les quatre pièces couvrent bien le carré JHKN.

Pourquoi $CE \leq \frac{3}{5} DE$?

Pour ce découpage, le point L doit être sur le segment [MI]. Donc, la longueur LK doit être inférieure ou égale à DE.

On désigne par a et x les longueurs respectives des côtés des carrés ABCD et CEFG.

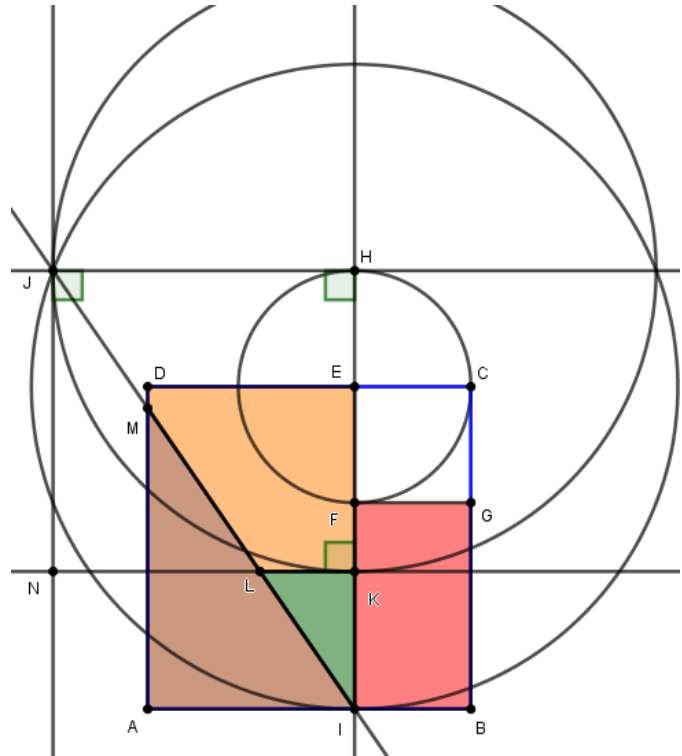
On a $DE = a - x$

Et en appliquant le théorème de Pythagore au triangle EHJ rectangle en H, on a : $JH = \sqrt{a^2 - x^2}$

Par ailleurs, les points M et L sont confondus lorsque K est le milieu de [IH].

Il en résulte que la longueur LK est maximale lorsque K est le milieu de [IH] et, d'après le théorème des milieux, cette longueur maximale vaut

$$\frac{JH}{2} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2}.$$



D'autre part, $LK + DE = JH$ ou encore $LK + a - x = \sqrt{a^2 - x^2}$

Ainsi :

$$LK \leq \frac{JH}{2}$$

$$\Leftrightarrow LK + a - x \leq \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + a - x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 - x^2} \leq \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + a - x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2} \leq a - x$$

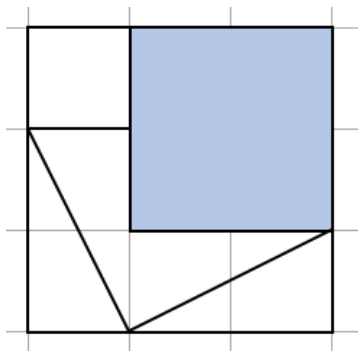
$$\Leftrightarrow 0 \leq 2(a - x) - \sqrt{a^2 - x^2}$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est l'intervalle $\left[0; \frac{3}{5}a\right]$.

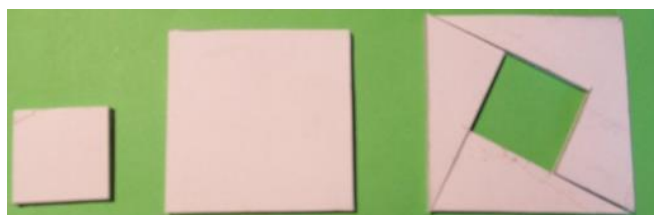
$\frac{3}{5}a$ est l'une des deux solutions de l'équation $4(a - x)^2 - (a^2 - x^2) = 0$ ou encore

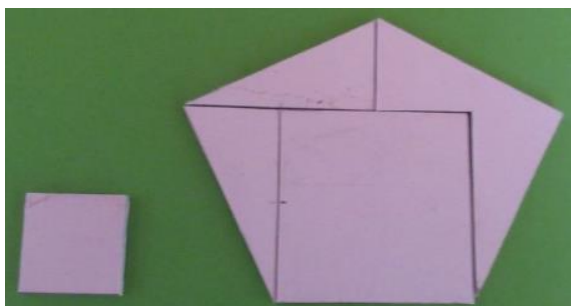
$$5x^2 - 8ax + 3a^2 = 0.$$

Un carré doublement écorné



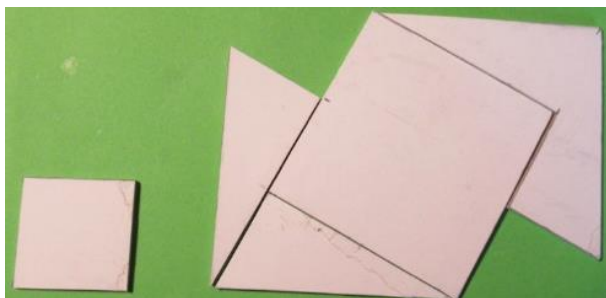
En mettant de côté le carré bleu, un carré peut être réalisé avec les quatre pièces restantes.





Le petit carré est mis de côté.

Le pentagone formé par les quatre autres pièces admet un axe de symétrie.

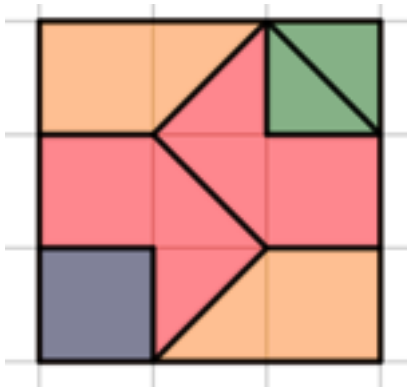


Le petit carré est mis de côté.

Le polygone formé par les quatre autres pièces admet un centre de symétrie.

Sur notre site, un [document à télécharger](#) propose une piste d'utilisation de ce carré doublement écorné avec des élèves.

Le carré baladeur



Ce carré écorné fait partie des découpages proposés dans le [Petit Vert n° 150](#)

Les pièces de couleur orange, rouge et verte permettent la réalisation d'un carré.

L'ensemble des sept pièces permet la réalisation d'un carré tel que le carré gris puisse être placé différemment.