

PROBLÈME 150 : RANDONNONS

Proposé par [Philippe Févotte](#)

Un randonneur parcourt un chemin et revient sur ses pas jusqu'à son point de départ. Le parcours a une durée d'une heure.

Montrer que pour toute durée, exprimée en heure, d inférieure ou égale à 1, il existe un instant t_0 , tel que la position du marcheur soit même en t_0 et $t_0 + d$.

SOLUTION PROBLÈME 149 : POUR COMMENCER 2022

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 1, u_1 = 2 \text{ et pour } n \geq 0, \frac{u_{n+2}}{u_n} = \frac{u_{n+1}^2 + 1}{u_n^2 + 1}$$

- 1) Déterminer u_2 , u_3 et u_4 puis conjecturer et démontrer une relation de récurrence de premier ordre définissant la suite (u_n) .
- 2) Sans calculer d'autres termes de la suite (u_n) , donner un encadrement d'amplitude 1 de u_{2022}
- 3) Montrer que $u_n \sim \sqrt{2n}$

Solution

Une solution a été proposée par Jacques Choné.

- 1) On a les valeurs $u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = \frac{5}{2}, u_3 = \frac{29}{10}$ et $u_4 = \frac{91}{290}$.

On peut conjecturer la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$

La relation est vérifiée pour $n = 0$

Supposons-la vraie pour un entier n et montrons qu'elle est vraie pour $n + 1$

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2 + 1}{u_n^2 + 1} u_n = \frac{u_{n+1}^2 + 1}{\left(\frac{u_n^2 + 1}{u_n}\right)} = \frac{u_{n+1}^2 + 1}{u_n + \frac{1}{u_n}} = \frac{u_{n+1}^2 + 1}{u_{n+1}} = u_{n+1} + \frac{1}{u_{n+1}}.$$

La relation de récurrence est donc bien vérifiée pour tout entier naturel n

- 2) On a donc pour tout entier $k \geq 1, u_k^2 = \left(u_{k-1} + \frac{1}{u_{k-1}}\right)^2 = u_{k-1}^2 + 2 + \left(\frac{1}{u_{k-1}}\right)^2 \geq u_{k-1}^2 + 2$

On peut écrire ainsi n inégalités pour k prenant successivement les valeurs 1, 2, 3, ..., n .

En sommant membre à membre ces n inégalités, on obtient : $u_n^2 \geq 1 + 2n$, c'est-à-dire :

$$u_n \geq \sqrt{1 + 2n} \quad (1)$$

$$\text{Par conséquent, } u_n^2 = \left(u_{n-1} + \frac{1}{u_{n-1}}\right)^2 = u_{n-1}^2 + 2 + \left(\frac{1}{u_{n-1}}\right)^2 \leq u_{n-1}^2 + 2 + \frac{1}{2n-1}.$$

On en déduit que pour k prenant successivement les valeurs 1, 2, 3, ..., n , on obtient :

$$u_k^2 \leq u_{k-1}^2 + 2 + \frac{1}{2k-1}.$$

En sommant membre à membre ces n inégalités pour k prenant successivement les valeurs 1, 2, 3, ..., n , on obtient :

$$u_n^2 \leq 1 + 2n + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} = 1 + 2n + S_n$$

[Retour au sommaire](#)

Soit H_n la série harmonique définie par $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

On a alors $S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{2n}\right)$

Donc $S_n = H_{2n} - \frac{1}{2}H_n$

Or on sait que (résultat « classique ») : $\ln(k) \leq H_k \leq \ln(k) + 1$.

Par conséquent $S_n \leq \ln(2n) + 1 - \frac{1}{2}\ln(n)$, soit $S_n \leq \ln(2\sqrt{n}) + 1$

On peut donc en conclure que pour tout entier $n \geq 1$:

$$1 + 2n \leq u_n^2 \leq 1 + 2n + \ln(2\sqrt{n}) + 1$$

Par conséquent avec $n = 2022$, on obtient :

$$4045 \leq u_{2022}^2 \leq 4046 + \ln(2\sqrt{2022})$$

Soit

$$4045 \leq u_{2022}^2 \leq 4050,5$$

D'où

$$63,6 \leq u_{2022} \leq 63,65$$

Jacques Choné utilise un encadrement moins précis, mais il énonce un résultat plus général ; il majore S_n par H_{2n} et obtient ainsi que :

$$u_n \leq \sqrt{2n + 2 + \ln(2n)}$$

Une étude de fonction montre que pour $n \geq 1$, $\sqrt{2n + 2 + \ln(2n)} \leq \sqrt{2n + 1} + 1$

Par conséquent, pour $n \geq 1$, $\sqrt{2n + 1} \leq u_n \leq \sqrt{2n + 1} + 1$, ce qui répond à la question posée.

3) De l'encadrement ci-dessus, on tire rapidement que $u_n \sim \sqrt{2n}$

Deux remarques :

- On peut s'intéresser à la suite A073833 sur l'encyclopédie en ligne OEIS
- On peut se passer pour la question 2) de la référence à la série harmonique. En effet, à partir de l'égalité $u_k^2 = \left(u_{k-1} + \frac{1}{u_{k-1}}\right)^2 = u_{k-1}^2 + 2 + \left(\frac{1}{u_{k-1}}\right)^2$, on peut encadrer, par exemple u_{10} , par sommation d'inégalités, puis en réitérant la méthode encadrer u_{2022} . On obtient un encadrement convenable, mais moins fin que par la méthode proposée ici s'appuyant sur les résultats connus de la série harmonique. De plus ce procédé ne permet pas de trouver l'équivalent de la suite (u_n) .