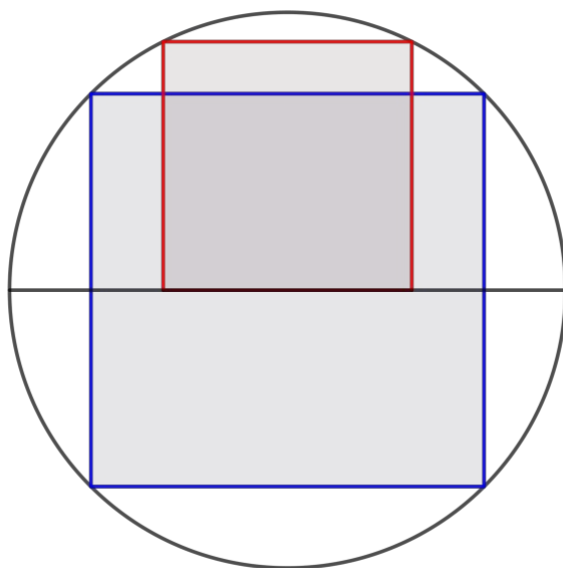


DÉFI N°150 – 1**« AIRES DE CARRÉS : AU RAPPORT ! »**

Le carré bleu est inscrit dans un cercle et le carré rouge est inscrit dans un demi-cercle de même rayon.
Quel est le rapport des aires de ces deux carrés ?

DÉFI N°150 – 2 « PERTE DE PUISSANCES »

Soient a et b deux nombres entiers naturels tels que :

$$\begin{aligned}4^a &= 9 \\ 9^b &= 256\end{aligned}$$

Que vaut le produit ab ?

DÉFI ALGORITHMIQUE N° 150

Certaines énigmes du rallye mathématique de Lorraine auraient certainement été plus simples à résoudre à l'aide d'un petit programme informatique.

Nous vous proposons ici, comme défi, de résoudre l'exercice ci-dessous à l'aide d'un programme. L'exercice suivant avait été proposé en 2016.

L'année 2016 a commencé par un vendredi et se terminera par un samedi.

Quelle sera la prochaine année qui commencera par un vendredi et se terminera par un samedi ?

On demande d'écrire une fonction `bisRepetita(n)` qui, pour une année n passée en paramètre, renvoie le plus petit rang d'année $n' > n$, dont le 1^{er} janvier et le 31 décembre sont les mêmes jours de la semaine que n .

SOLUTION DÉFI ALGORITHME - RALLYE 149

Le défi algorithmique du PV 149 reprenait l'exercice 8 du Rallye 2015 et demandait d'écrire une fonction pour déchiffrer un message crypté avec le codage affine de clé (a,b) .

La difficulté de trouver l'inverse de l'entier a modulo 26. Certes, l'algorithme de Bézout est une stratégie classique, mais peu aisée à mettre en œuvre dans le secondaire. On procédera donc à une recherche en étudiant tous les entiers jusqu'à trouver cet inverse. Ainsi, pour retrouver la lettre qui a été codée par 'N' dans le message en clair, on est amené à résoudre : $5x+12=13$ soit $5x=1$ qui n'a pas de solution entière. On essaie donc $5x=27$ puis $5x=53$ puis $5x=79$ et enfin $5x=105$ qui donne $x=21$, soit la lettre V. La première fonction, `solution26`, prend donc en paramètre a et un entier c et renvoie x tel que : $ax=c[26]$. Ceci étant acquis, on décode le message lettre par lettre. On associe à chacune son rang dans l'alphabet puis on détermine le rang de la lettre dont le rang est donné par la fonction `solution26`.

Pseudo-code :

```
Fonction solution26(a, c : entiers ; entier)
  tant que a ne divise pas c, faire :
    c ← c + 26
  finTantque ;
  renvoyer c/a
```

```

Fonction decodage(crypte : chaîne, a,b : entiers ; message : chaîne)
    alphabet ← "ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ » ;
    n ← longueur(crypte) ;      (nombre de caractères du message crypte)
    clair ← "" ;                (le message en clair)
    pour i allant de 0 à n-1, faire : (le premier caractère d'une chaîne est au rang 0)
        lettre1 ← crypte[i] ;      (lettre de rang i dans le message crypte)
        si lettre1 ≠ " ", alors : (le caractère n'est pas une espace)
            rang1 ← rang de lettre 1 dans l'alphabet ;
            rang2 ← solution26(a, rang1-b) ; (rang de la lettre en clair)
            lettre2 ← lettre de rang rang2 dans alphabet ;
        sinon :
            lettre2 ← " " ; (on remplace une espace par une espace)
        finSi ;
        message ← message + lettre2 ;
    renvoyer message

```

Python

```

def solution26(a,c):
    """
    Fonction solution26(a,c : entiers; entier)
    renvoie le plus petit naturel x solution de ax=c[26]
    """
    while c%a >0:
        c = c + 26
    return c//a

def decodage(crypte,a,b):
    """
    Fonction decodage(crypte : chaîne, a,b : entiers; message : chaîne)
    renvoie le déchiffrement du message crypte par le codage affine de paramètres a et b
    """
    alphabet="ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ"
    n = len(crypte)
    message = ""
    for i in range(n):
        lettre1 = crypte[i]
        if lettre1 != " ":
            rang1 = alphabet.index(lettre1)
            rang2 = solution26(a,rang1-b)
            lettre2 = alphabet[rang2]
        else:
            lettre2 = " "
        message = message + lettre2
    return message

```

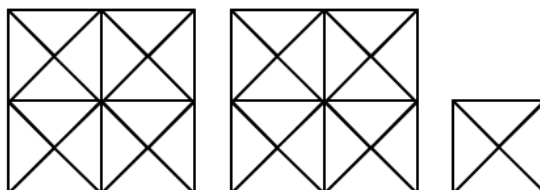
SOLUTION DÉFI N°149 – 1

« AVEC LES 9 CARRÉS DE MACMAHON TRICOLORES »

Rappel de l'énoncé :

Les neuf pièces permettent la réalisation de deux carrés formés avec quatre pièces, une pièce restera isolée.

- Essayer d'en réaliser plusieurs différentes.
- Essayer, en respectant la règle des couleurs, d'assembler les trois carrés.

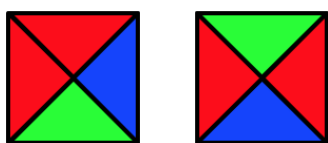


Toute pièce, parmi les neuf proposées, peut-elle être mise de côté avant de former les deux carrés de quatre pièces ?

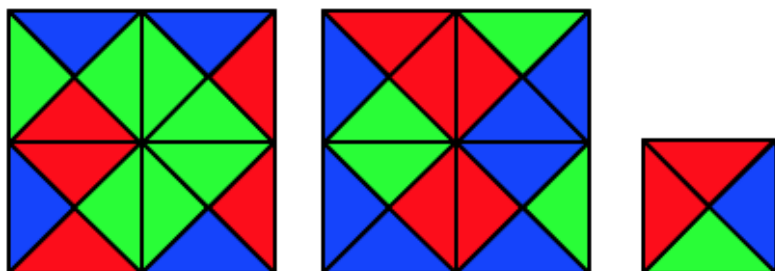
Première méthode

Mettre un carré de côté (9 possibilités) et réaliser deux carrés avec les huit restants. Neuf paires de carrés seront trouvées. Cette démarche pourra être mise en œuvre lors d'une recherche à plusieurs.

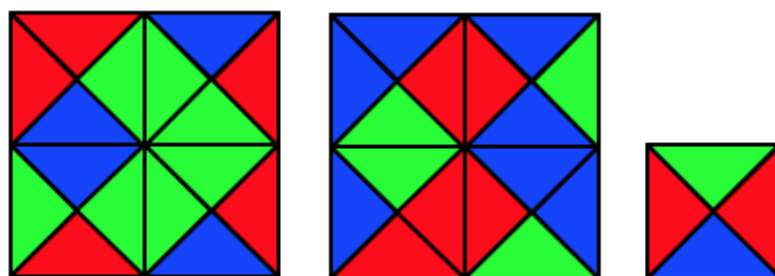
Deuxième méthode



Il existe deux types de pièces tricolores : celles où les deux zones de même couleur sont deux triangles adjacents par un côté (symétriques par rapport à une diagonale du carré) et celles pour lesquelles les deux zones de même couleur se touchent par un sommet (symétriques par rapport au centre du carré).



J'isole une pièce du premier type et je réalise un rectangle avec les huit restantes.



J'isole une pièce du second type et je réalise un rectangle avec les huit restantes.

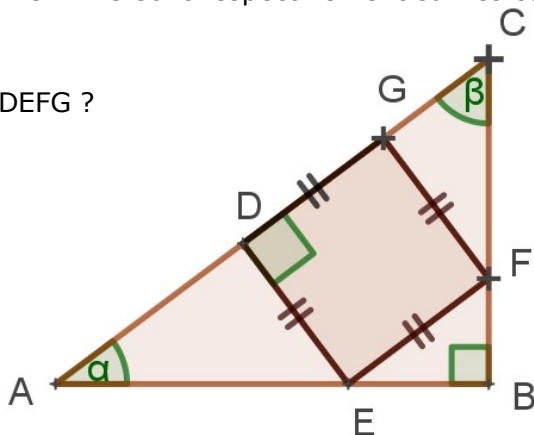
Des permutations de couleur sur les carrés isolés et dans les assemblages réalisés me garantissent que toute pièce peut être isolée afin que les huit restantes s'assemblent pour former le rectangle attendu. Cette démarche pourra être mise en œuvre lors d'une recherche plus individuelle.

SOLUTION DÉFI N°149 – 2

Les sommets E et F du carré DEFG sont respectivement sur les côtés [AB] et [BC] du triangle rectangle ABC.

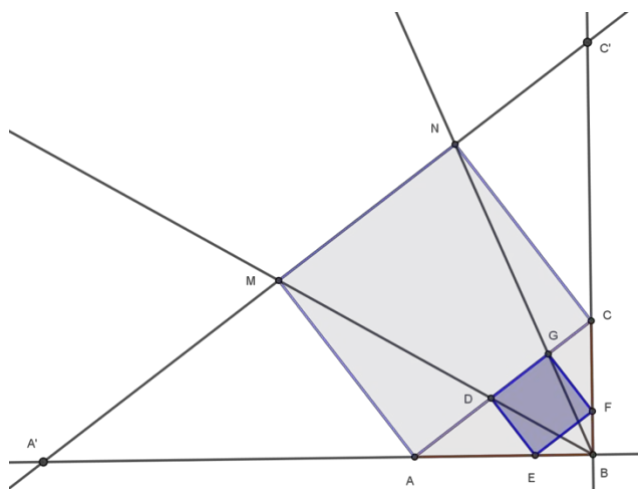
AB=4 et BC=3.

Quelle est l'aire du carré DEFG ?



Solution 1

Cette solution consiste à utiliser l'homothétie de centre B qui transforme le carré AMNC, construit sur l'hypoténuse du triangle ABC rectangle en B, en le carré EFGD répondant au problème posé. On doit cette construction au mathématicien [Etienne Bézout](#) dont la méthode élégante et astucieuse fournit une construction simple du carré EFGD : D et G sont les intersections des droites (BM) et (BG) avec l'hypoténuse [AB] du triangle ABC rectangle en B.



Déterminons le rapport de cette homothétie.

Les triangles ABC et CNC' étant semblables, on peut déduire que $\frac{CC'}{AC} = \frac{CN}{AB}$

$$\text{soit } \frac{CC'}{5} = \frac{CN}{4}$$

$$\text{ou encore } CC' = \frac{25}{4}.$$

$$\text{D'où } BC' = BC + CC' = 3 + \frac{25}{4} = \frac{37}{4}$$

L'homothétie de centre B transformant le carré AMNC en le carré EFGD transforme aussi le point C' en C, donc son rapport vaut

$$\frac{BC}{BC'} = \frac{3}{\frac{37}{4}} = \frac{12}{37}.$$

$$\text{Et par conséquent, } \text{Aire}(EFGD) = \left(\frac{12}{37}\right)^2 \text{Aire}(AMNC) = \frac{144}{1369} \times 25 = \frac{3600}{1369}$$

Solution 2

On pose AD = y, AE = z et DE = x.

Les triangles rectangles ABC, ADE, BEF et CFG étant semblables, on peut déduire que :

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} \text{ d'où } \frac{x}{y} = \frac{3}{4} \text{ et } z = \frac{5}{3}x$$

$$\frac{CF}{z} = \frac{x}{y} \text{ ou encore } CF = \frac{xz}{y}$$

$$\text{Il en résulte que } CF = \frac{3}{4}z.$$

Par ailleurs, l'aire du triangle ABC est la somme des aires des triangles ADE, BEF, CFG et du carré DEFG.

$$\text{Ainsi } x^2 + \frac{xy}{2} + \frac{x(5-x-y)}{2} + \frac{(4-z)(3-\frac{3}{4}z)}{2} = 6 \text{ ou encore } x^2 + \frac{5x-x^2}{2} + \frac{(4-z)(12-3z)}{8} = 6$$

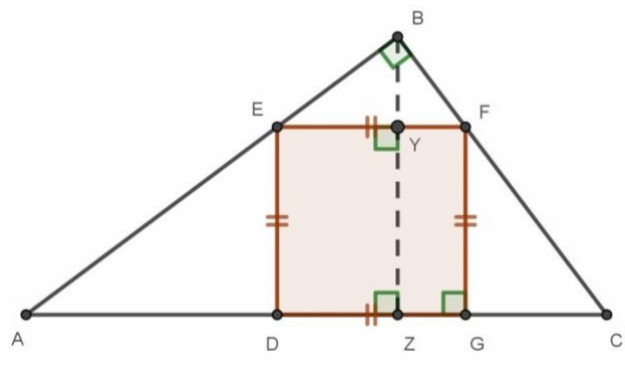
$$\text{et } \frac{5x+x^2}{2} + \frac{3(4-z)^2}{8} = 6 \text{ soit } \frac{5x+x^2}{2} + \frac{3(4-\frac{5}{3}x)^2}{8} = 6 \text{ et } \frac{5x+x^2}{2} + \frac{(12-5x)^2}{24} = 6$$

$$\text{d'où } \frac{60x+12x^2}{24} + \frac{144+25x^2-120x}{24} = 6 \text{ soit } \frac{144+37x^2-60x}{24} = 6 \text{ ie } 37x^2 - 60x = 0 \text{ et enfin } x(37x - 60) = 0$$

Puisque x est non nul, alors la seule solution possible est $\frac{60}{37}$.

Le carré DEFG a donc pour côté $\frac{60}{37}$ et son aire vaut $(\frac{60}{37})^2 = \frac{3600}{1369}$.

Solution 3



Le triangle ABC est rectangle en B avec $AB = 4$ et $BC = 3$.

J'utilise le théorème de Pythagore et j'ai $BC=5$.

Je calcule l'aire du triangle rectangle ABC de deux façons différentes pour calculer la hauteur BZ issue de l'angle droit.

J'obtiens $BZ=2,4$.

$$DE = EF = FG = GD = x$$

BY est la hauteur issue de l'angle droit du triangle EBF rectangle en B, j'ai

$$BZ = x + BY \text{ donc } BY = 2,4 - x.$$

$\frac{BY}{BZ}$ est le rapport des hauteurs des deux triangles rectangles semblables EBF et ABC.

$$\text{On a } \frac{BY}{BZ} = \frac{2,4-x}{2,4}$$

Le rapport des aires des deux triangles rectangles semblables EBF et ABC est alors le carré de

$$\frac{2,4-x}{2,4} \text{ soit } \frac{\frac{x \times (2,4-x)}{2}}{6} = \frac{2,4-x}{2,4} \times \frac{2,4-x}{2,4}$$

$$x > 2,4 \text{ donc on peut simplifier par } 2,4 - x \text{ d'où } \frac{x}{6} = \frac{2,4-x}{2,4} \times \frac{1}{2,4}$$

$$\text{Cette équation du premier degré a pour solution } x = \frac{60}{37}$$

$$\text{On en conclut que l'aire du carré DEFG est égale à } (\frac{60}{37})^2 = \frac{3600}{1369}$$

Solution 4

Les triangles ABC, ADE, EBF et CGF sont semblables. Posons $DE=EF=FG=GD=x$

$$\text{On a : Aire EBF} = (\frac{x}{5})^2 \times \text{Aire ABC} = \frac{6x^2}{25}; \text{ Aire AED} = (\frac{x}{3})^2 \times \text{Aire ABC} = \frac{6x^2}{9} \text{ et}$$

$$\text{Aire CGF} = (\frac{x}{4})^2 \times \text{Aire ABC} = \frac{6x^2}{16} \text{ avec Aire DEFG} = x^2.$$

$$\text{Aire DEFG} = \text{Aire ABC} - (\text{Aire ADE} + \text{Aire EBF} + \text{Aire CGF}) \text{ d'où } x^2 = 6 - (\frac{6x^2}{25} + \frac{6x^2}{9} + \frac{6x^2}{16})$$

$$\text{soit } x^2 = 6 - \frac{4614}{3600} x^2 \text{ ce qui nous donne } x^2 = \frac{3600}{1369}$$

Une cinquième solution a été trouvée, faisant intervenir la trigonométrie dans les 3 triangles rectangles semblables.