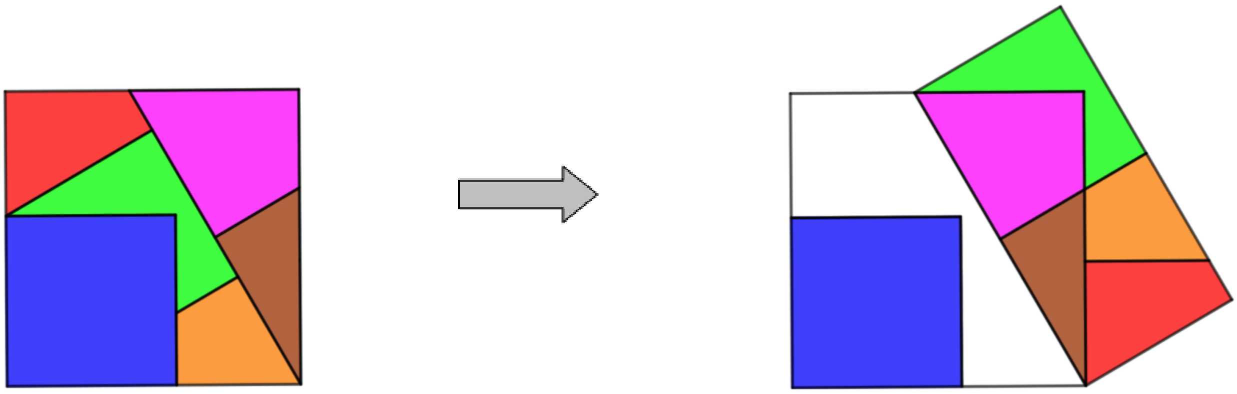
ÉTUDE MATHÉMATIQUE

LA TRISECTION DU CARRÉ (PARTIE 1)

Fathi Drissi
Groupe Jeux de l’APMEP Lorraine

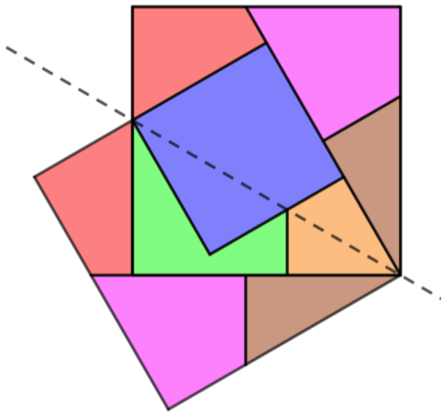
Comment découper un carré en trois carrés superposables et en un nombre minimal de morceaux ?
Ce problème de trisection du carré remonte au X^e^ siècle dont une première solution en neuf morceaux fut proposée par Abu'l-Wafa' et c’est seulement en 1891 que Henry Perigal publie la première solution connue en six morceaux.
La conjecture que six est le nombre minimal de pièces n’est toujours pas démontrée et il est donc toujours intéressant de partager de nouvelles trisections comportant ce nombre de pièces.
Alors, voici trois nouvelles trisections en six morceaux où l’un des trois carrés recherchés est formé d’une seule pièce.

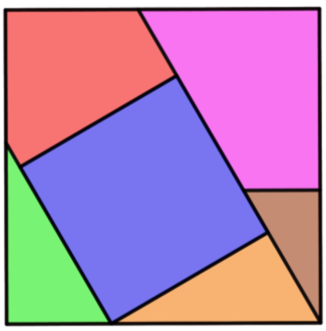


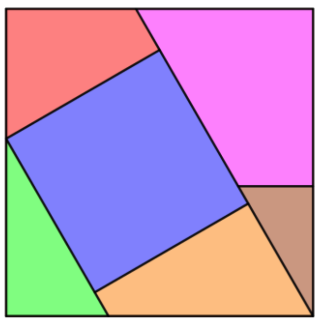
Un carré **Trois carrés superposables**

Les pièces orange, verte et le carré bleu forment un cerf-volant qui peut être retourné autour de son axe de symétrie et permettant ainsi au carré bleu d’occuper deux positions différentes comme le montre le dessin ci-contre.

Cette position du carré bleu à l’intérieur du grand carré a permis de trouver les deux autres trisections ci-dessous.





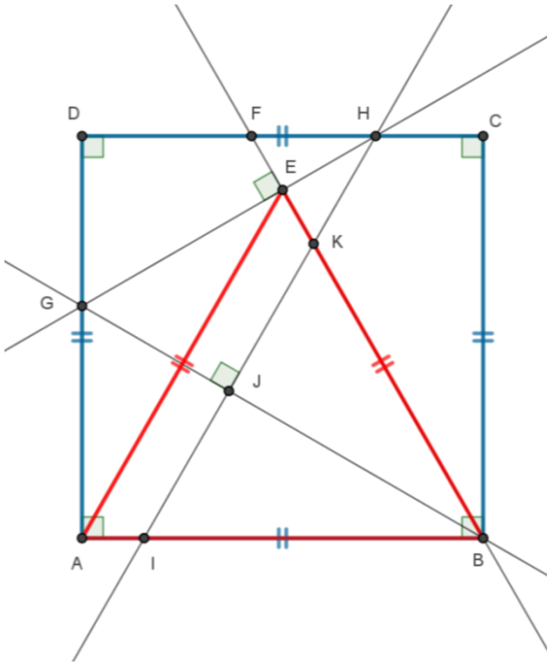


Retour au sommaire

Comment ces trisections ont-elles été trouvées ?

La première trisection présentée plus haut a été découverte en ayant observé que le triangle équilatéral construit à l'intérieur d'un carré et sur l'un de ses côtés permet de découper ce carré en quatre pièces : un quadrilatère ayant deux angles droits (le quadrilatère DFEG sur la figure ci-contre) et trois triangles rectangles superposables qui sont des moitiés d'un triangle équilatéral (les triangles ABG, BEG et BCF sur la figure ci-contre).

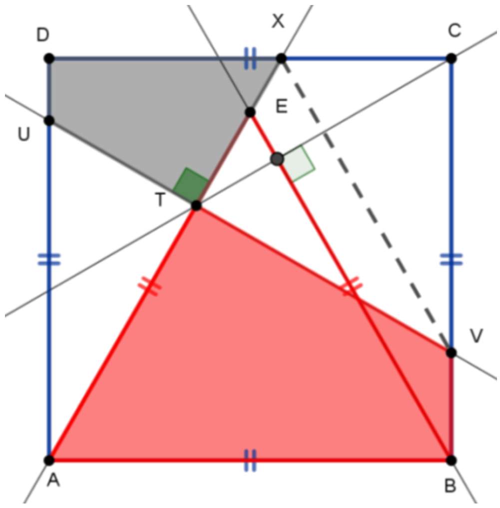
À l'aide de trois carrés superposables découpés comme ci-contre (**Découpage A**), on peut donc réaliser trois agrandissements de ces triangles dans le rapport $\sqrt{3}$. Il reste à réaliser un agrandissement du quadrilatère DFEG dans le même rapport avec les trois quadrilatères superposables restants.



Découpage A

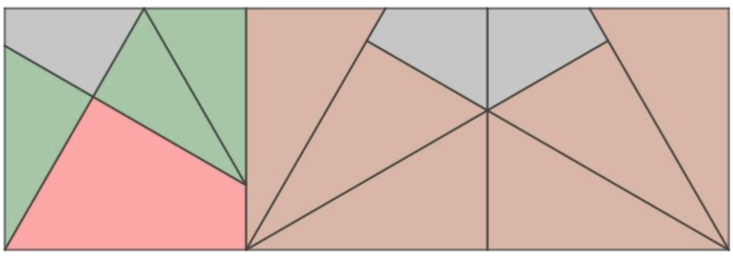
Toutefois, il existe un découpage du carré permettant d'obtenir directement l'agrandissement recherché.

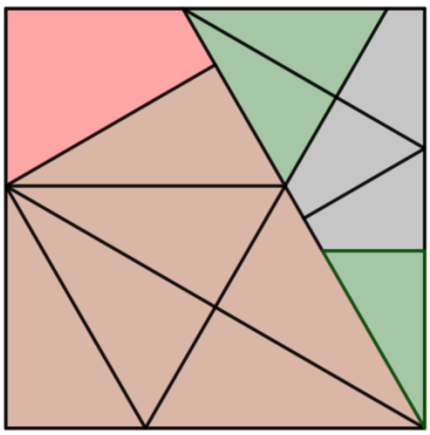
Le découpage ci-contre permet d'obtenir trois triangles rectangles (TAU, TVX et CVX sur la figure ci-contre) et deux quadrilatères dont un est l'agrandissement de l'autre dans le rapport $\sqrt{3}$ (DXTU et ABVT sur la figure ci-contre). De plus, DXTU et DGEF sont superposables. Remarquons aussi que le quadrilatère DXTU et le triangle TAU forment un triangle superposable au triangle ABG de la figure précédente (**Découpage A**).



Découpage B

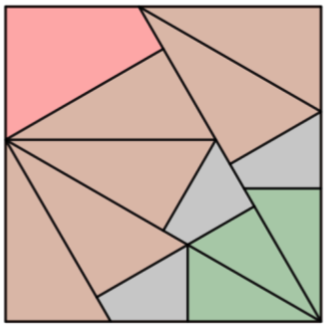
Ainsi, en découpant trois carrés superposables comme indiqué ci-dessous, les pièces obtenues permettent de réaliser un carré d'aire trois fois plus grande que celle de l' un de ces trois carrés.





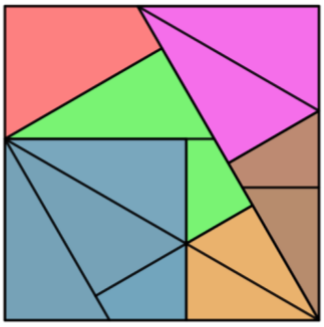
Retour au sommaire

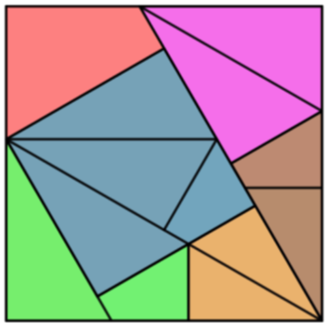
Ces pièces peuvent être réassemblées de différentes manières et certains assemblages permettent de minimiser le nombre de pièces.



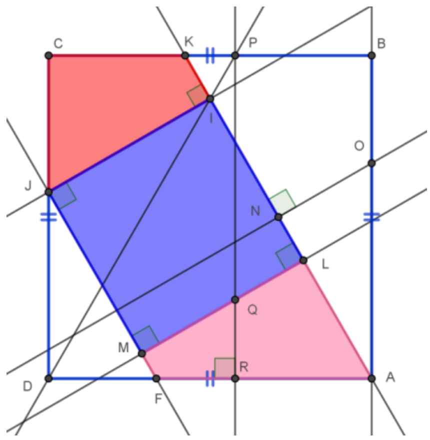
Par exemple, les figures ci-dessous montrent des assemblages réduisant le nombre de pièces à six.

Le cerf-volant formé des pièces bleue, verte et orange admet un axe de symétrie, ce qui permet de placer le petit carré bleu sur les côtés du grand carré et d'obtenir une dissection de la surface en forme de L en deux carrés.

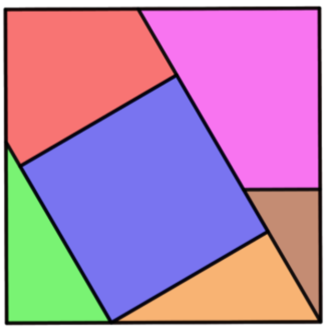


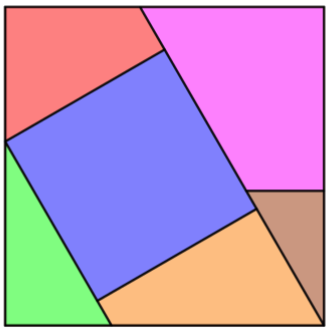


Par ailleurs, comme pour la trisection de Christian Blanvillain, le découpage ci-contre permet d'obtenir une infinité de solutions par glissement des pièces rouge, bleue et rose le long de la droite (AK).



Parmi ces solutions, on retiendra les deux trisections suivantes.

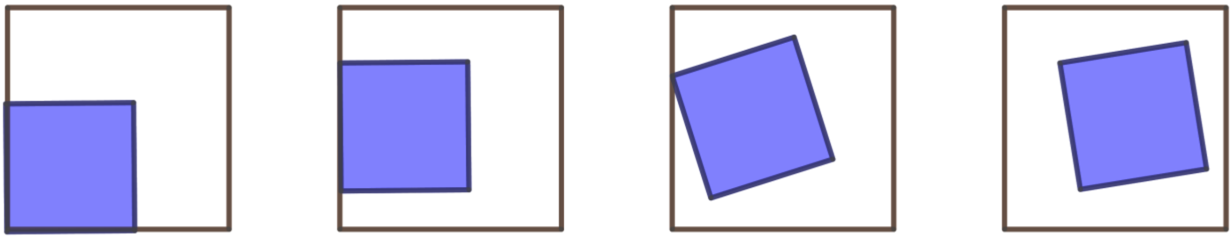




Pour conclure, les six pièces des trisections présentées dans cet article ne sont ni symétriques, ni de même aire mais ce sont les seules trisections en six pièces où l'un des trois carrés recherchés est formé d'un seul morceau, à l'intérieur du grand carré et non accolé au bord.
En 2010, Christian Blanvillain et János Pach ont publié une trisection du carré en six morceaux où toutes les pièces ont la même surface, et élégante par sa symétrie. Le Petit Vert n°139 l'avait évoquée, ainsi que deux autres trisections formées de six pièces.

Retour au sommaire

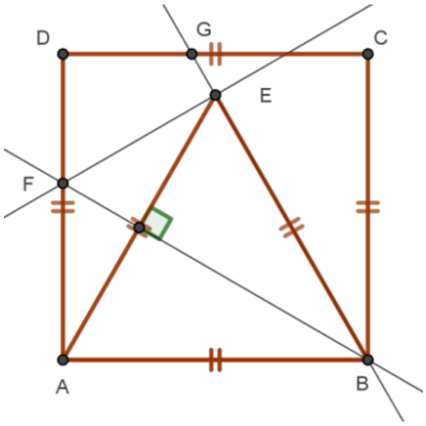
Dans leur article, les auteurs conjecturent qu'il n'est pas possible de réaliser une trisection du carré en moins de six pièces. Si une telle trisection était possible, alors on aurait nécessairement l'un des trois carrés recherchés en un seul morceau.
On peut donc se poser la question suivante : "En plaçant un carré à l'intérieur de son agrandissement dans le rapport $\sqrt{3}$ comme sur les figures ci-dessous, peut-on disséquer la surface restante qui l'entoure en deux carrés superposables au premier et en moins de cinq morceaux ?"

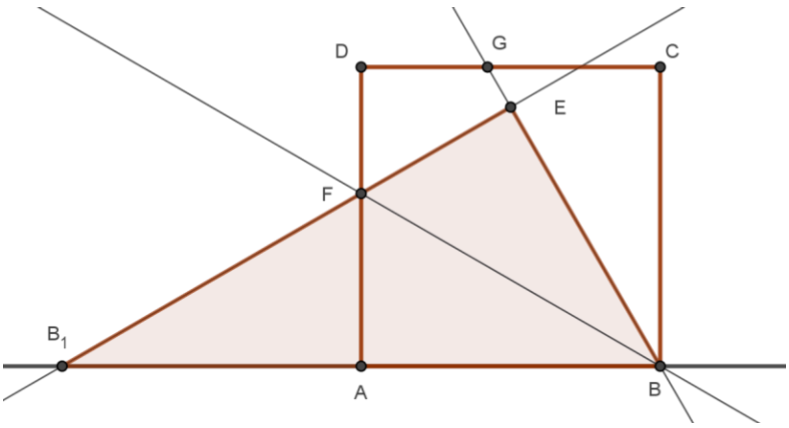


Quelques justifications

Découpage A

Sur la figure représentée ci-contre, ABCD est un carré de côté *a* et ABE un triangle équilatéral.
Le triangle BCG est rectangle en C avec $\widehat{CBG} = 30°$. Il s'en suit que $BG = 2CG$ et d'après le théorème de Pythagore, $BG = \frac{2}{3}a\sqrt{3}$.
Le point F est l'intersection de la médiatrice de [AE] avec [AD]. Donc, ABF est un triangle rectangle avec $\widehat{ABF} = 30°$.
Et comme AB=BC, les triangles ABF et BCG sont isométriques.
Quant aux triangles ABF et BEF, ils ont un côté en commun et un angle de même mesure, $\widehat{ABF} = \widehat{EBF}$, compris entre deux côtés de même longueur. Ils sont donc isométriques.
Ainsi, les trois triangles ABF, BEF et BCG sont des demi-triangles équilatéraux et superposables.

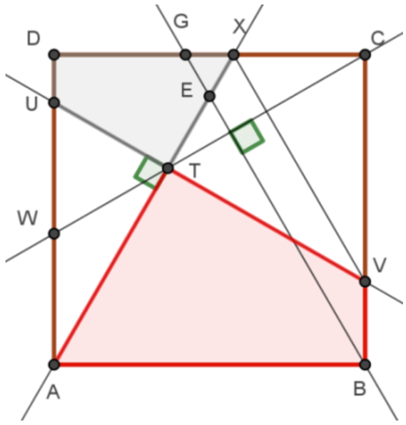




Le triangle BB_1E est formé de trois de ces triangles, c'est donc leur agrandissement dans le rapport $\sqrt{3}$.

Retour au sommaire

Découpage B



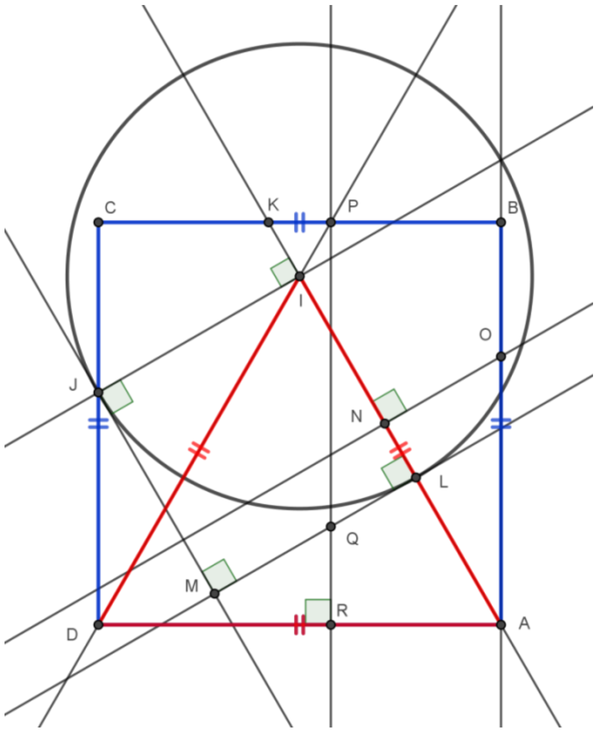
Pour ce découpage, on construit T à l'intersection de la perpendiculaire à (BE) passant par C avec [AE], puis on trace la perpendiculaire à (AE) passant par T qui coupe [BC] en V et [AD] en U.
Les triangles ADX et BCG sont des demi-triangles équilatéraux (des triangles rectangles dont un angle aigu mesure 30°).
La droite (CW) est perpendiculaire à (BE), donc elle coupe le triangle BCG en deux triangles rectangles qui lui sont semblables et il s'en suit que CDW est un demi-triangle équilatéral superposable à ADX et BCG. Par conséquent DX=DW et CX=AW.
Les triangles rectangles ATU et CDW ont un angle aigu de 30°, donc semblables et par conséquent les angles $\widehat{TUW}$ et $\widehat{TWU}$ mesurent 60°. Il en résulte que TUW est un triangle équilatéral et TWA isocèle en W.
De même, le triangle CXT est isocèle en X et CTV est un triangle équilatéral.
On en déduit que les triangles CVX, VXT et TAU sont superposables.
On a $CG = DX = \frac{BG}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, d'où $AB = DX\sqrt{3}$.
De plus, les quadrilatères DXTU et ABVT se décomposent en deux triangles, l'un rectangle et isocèle, l'autre rectangle dont un angle aigu mesure 15°, donc deux à deux semblables.
Ainsi, le quadrilatère ABVT est un agrandissement du quadrilatère DXTU dans le rapport $\sqrt{3}$.

Un programme de construction

Voici un programme de construction permettant de réaliser cette trisection.

Soit ABCD un carré.

1) Construire le triangle équilatéral AID. Les droites (DI) et (AI) coupent [BC] respectivement en P et K.
2) Tracer la perpendiculaire à (AK) en I. Elle coupe [CD] en J.
3) Tracer le cercle de centre I passant par J. Il coupe [AI] en L.
4) Tracer la perpendiculaire à (IJ) en J et la perpendiculaire à (AI) en L. Elles se coupent en M.
5) Tracer la médiatrice de [AK]. Elle coupe [AB] en O.
6) Tracer la perpendiculaire à (BC) en P. Elle coupe [ML] en Q et [AD] en R.



Note du comité de rédaction

Christian Blainvillain a intégré les récentes découvertes lorraines sur le site présentant les trisections de carré du 10ème siècle à aujourd'hui. On y trouve aussi de quoi réaliser les découpages en utilisant les possibilités d'un FabLab !

Retour au sommaire