PROBLÈME DU TRIMESTRE N°149
POUR COMMENCER 2022

Proposé par Fabien Lombard

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 1 \ , \ u_1 = 2 \text{ et pour } n \geq 0, \ \frac{u_{n+2}}{u_n} = \frac{{u_{n+1}}^2+1}{{u_n}^2+1}$$

1) Déterminer u_2, u_3 et u_4 puis conjecturer et démontrer une relation de récurrence de premier ordre définissant la suite (u_n).
2) Sans calculer d'autres termes de la suite (u_n), donner un encadrement d'amplitude 1 de u_{2022}
3) Montrer que $u_n \sim \sqrt{2n}$

Retour au sommaire

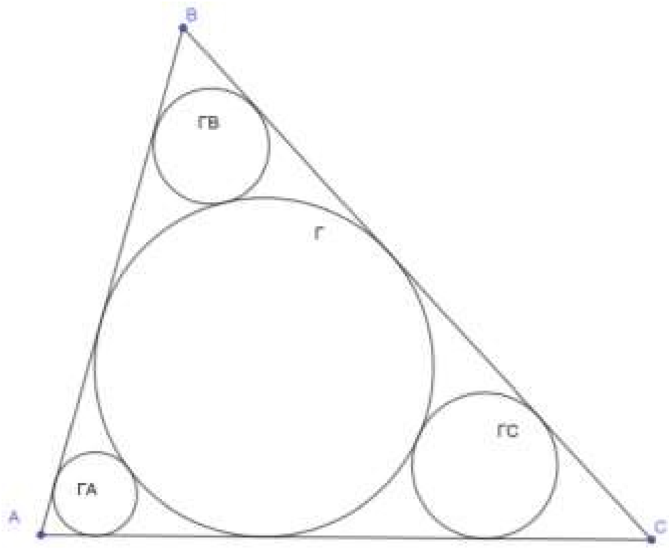
SOLUTION DU PROBLÈME N° 148

Proposée par Fabien Lombard

Énoncé

On considère un triangle ABC et son cercle inscrit Γ de rayon r. Les cercles Γ_A, Γ_B et Γ_C, de rayons respectifs r_A, r_B et r_C sont tangents à Γ et à des côtés du triangle ABC.

Justifiez que la construction ci-contre est possible et exprimer r en fonction de r_A, r_B et r_C.



Solution

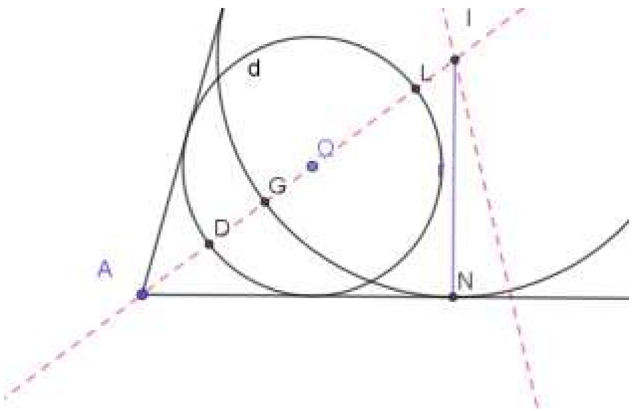
Une réponse a été proposée par Jacques Choné.

Validité de la construction

Soit Ω, un point de (AI), la bissectrice intérieure issue de A et $\Gamma 1$ le cercle de centre Ω, tangent aux deux côtés (AB) et (AC) du triangle. Si on note L et D les deux points d'intersection du cercle $\Gamma 1$ avec la bissectrice (AI) et G un point d'intersection de Γ avec la bissectrice (AI) , alors l'homothétie de centre Ω qui transforme D (respectivement L) en G transforme Γ en Γ_A (respectivement $\Gamma 1$).

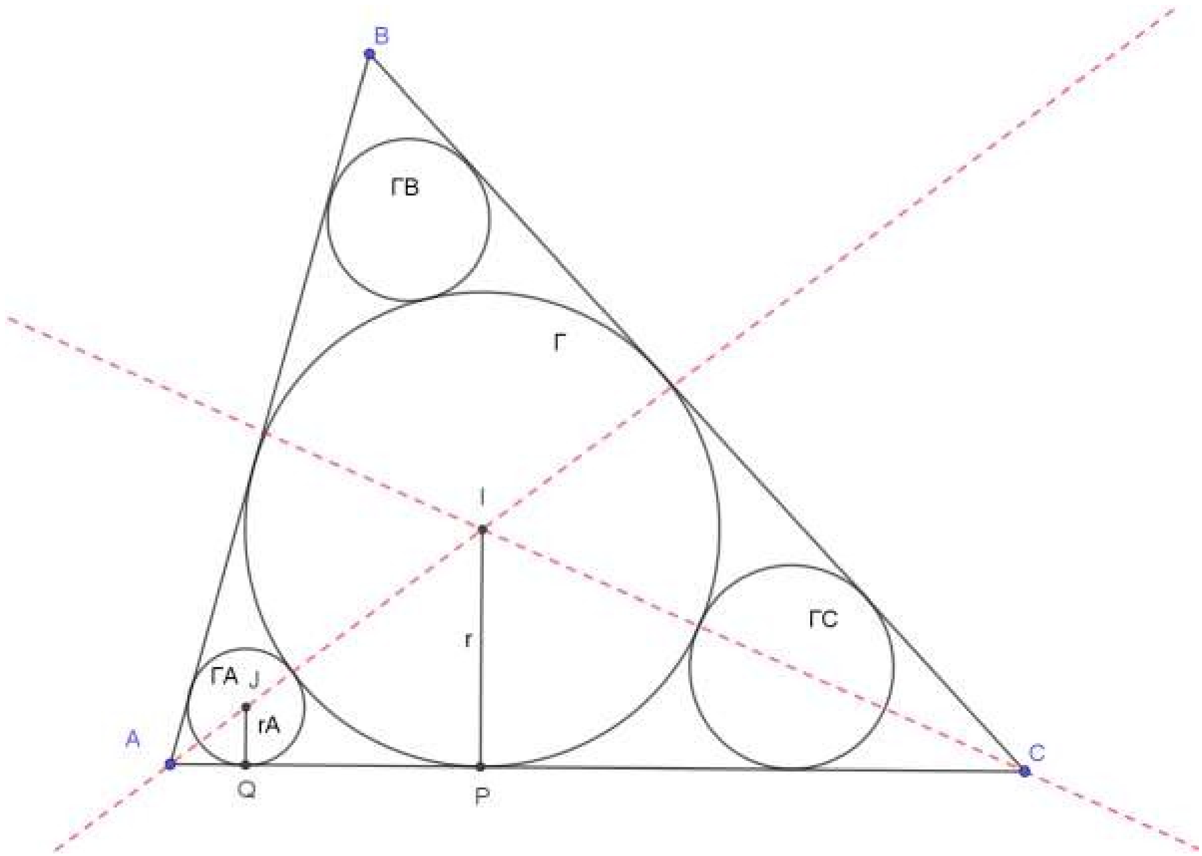
On obtient ainsi une construction deΓ_A ; il s'agit de la construction dite DDC d'Apollonius, rencontrée dans un problème précédent.

On agit de même pour la construction des cercles Γ_B et Γ_C.



Retour au sommaire

Calcul de r



Méthode 1

En exprimant les lignes trigonométriques dans les triangles AJQ et AIP, on obtient :

$$\sin\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \frac{r_A}{AJ} = \frac{r}{r + r_A + AJ}$$

On en déduit que $AJ = r_A \frac{r+r_A}{r-r_A}$ et par conséquent : $\sin\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \frac{r-r_A}{r+r_A}$

On a donc $\cos^2\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = 1 - \left(\frac{r-r_A}{r+r_A}\right)^2 = \frac{4rr_A}{(r+r_A)^2}$ et par conséquent : $\cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{rr_A}}{r+r_A}$

En utilisant : $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\hat{A}}{4}\right) = \frac{1-\tan\frac{\hat{A}}{4}}{1+\tan\frac{\hat{A}}{4}}$

et $\tan\frac{\hat{A}}{4} = \frac{\sin\frac{\hat{A}}{4}}{\cos\frac{\hat{A}}{4}} = \frac{2\sin\frac{\hat{A}}{4}\sin\frac{\hat{A}}{4}}{2\sin\frac{\hat{A}}{4}\cos\frac{\hat{A}}{4}} = \frac{1-\cos\frac{\hat{A}}{2}}{\sin\frac{\hat{A}}{2}} = \frac{1-\frac{2\sqrt{rr_A}}{r+r_A}}{\frac{r-r_A}{r+r_A}} = \frac{\left(\sqrt{r}-\sqrt{r_A}\right)^2}{r-r_A} = \frac{\sqrt{r}-\sqrt{r_A}}{\sqrt{r}+\sqrt{r_A}} = \frac{1-\sqrt{\frac{r}{r_A}}}{1+\sqrt{\frac{r}{r_A}}}$,

on déduit que $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\hat{A}}{4}\right) = \sqrt{\frac{r}{r_A}}$ et de même $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\hat{B}}{4}\right) = \sqrt{\frac{r}{r_B}}$ et $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\hat{C}}{4}\right) = \sqrt{\frac{r}{r_C}}$

On peut remarquer que $\frac{\pi}{4} - \frac{\hat{A}}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{\hat{A}}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{\hat{A}}{4} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\hat{A}+B+\hat{C}}{4} = \frac{\pi}{2}$

Retour au sommaire

De plus

$$\tan(x+y+z)=\frac{\tan(x+y)+\tan(z)}{1-\tan(x+y)\tan(z)}=\frac{\dfrac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y}+\tan(z)}{1-\dfrac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}\tan(z)}$$

$$=\frac{\tan(x)+\tan(y)+\tan(z)}{1-(\tan(x)\tan(y)+\tan(x)\tan(z)+\tan(y)\tan(z))}$$

Et donc par passage à la limite, on en déduit que :

si $x+y+z=\frac{\pi}{2}$, alors $1-(\tan(x)\tan(y)+\tan(x)\tan(z)+\tan(y)\tan(z))=0$

et donc dans le cas présent :

$$1-(\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\hat{A}}{4})\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\hat{B}}{4})+\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\hat{A}}{4})\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\hat{C}}{4})+\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{4})\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\hat{C}}{4}))=0$$

Soit $\sqrt{\frac{r}{r_A}}\sqrt{\frac{r}{r_B}}+\sqrt{\frac{r}{r_A}}\sqrt{\frac{r}{r_C}}+\sqrt{\frac{r}{r_B}}\sqrt{\frac{r}{r_C}}=1$ et par conséquent $r=\sqrt{r_Ar_B}+\sqrt{r_Ar_C}+\sqrt{r_Br_C}$.

Jacques Choné vérifie la même relation sans passage à la limite ; il développe $\sqrt{r_Ar_B}+\sqrt{r_Ar_C}+\sqrt{r_Br_C}$.

En posant $\alpha=\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\hat{A}}{4})\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\hat{B}}{4})\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\hat{C}}{4})$, on obtient $\sqrt{r_Ar_B}+\sqrt{r_Ar_C}+\sqrt{r_Br_C}=$

$$r\,(\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\hat{A}}{4})\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\hat{B}}{4})+\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\hat{A}}{4})\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\hat{C}}{4})+\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{4})\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\hat{C}}{4}))$$

$$=\frac{r}{\alpha}(\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\hat{A}}{4})\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\hat{B}}{4})\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\hat{C}}{4})+\cdots\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\hat{C}}{4})\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\hat{A}}{4})\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{4}))$$

$$=\frac{r}{\alpha}[\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\hat{A}}{4})(\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\hat{B}}{4})\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\hat{C}}{4})+\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\hat{C}}{4})\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\hat{B}}{4})\ldots)]$$

$$=\frac{r}{\alpha}[\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\hat{A}}{4})\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\hat{A}}{4})+\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\hat{B}}{4})\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\hat{C}}{4})\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\hat{A}}{4})]$$

$$=\frac{r}{\alpha}\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\hat{A}}{4})[\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\hat{B}}{4}+\frac{\pi}{4}-\frac{\hat{C}}{4})+\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\hat{B}}{4})\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\hat{C}}{4})]=\frac{r}{\alpha}\alpha=r$$

Méthode 2

Fabien Lombard propose également une seconde résolution.

On a établi que $\sin(\frac{\hat{A}}{2})=\frac{r-r_A}{r+r_A}$ et $\cos(\frac{\hat{A}}{2})=\frac{2\sqrt{rr_A}}{r+r_A}$

On peut exprimer de même $\cos(\frac{\hat{B}}{2})=\frac{2\sqrt{rr_B}}{r+r_B}$ et $\cos(\frac{\hat{C}}{2})=\frac{2\sqrt{rr_C}}{r+r_C}$.

Or $\frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}}{2}=\frac{\pi}{2}$, donc $\cos(\frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}}{2})=0$. Il reste à exprimer $\cos(\frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}}{2})$ en fonction des données.

$$\cos(\frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}}{2})=\cos((\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2})+\frac{\hat{C}}{2})=\cos((\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}))\cos(\frac{\hat{C}}{2})-\sin((\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}))\sin(\frac{\hat{C}}{2})$$

Retour au sommaire

$= \cos\frac{\hat{A}}{2}\cos\frac{\hat{B}}{2}\cos\frac{\hat{C}}{2} - \sin\frac{\hat{A}}{2}\sin\frac{\hat{B}}{2}\cos\frac{\hat{C}}{2} - \sin\frac{\hat{A}}{2}\cos\frac{\hat{B}}{2}\sin\frac{\hat{C}}{2} - \cos\frac{\hat{A}}{2}\sin\frac{\hat{B}}{2}\sin\frac{\hat{C}}{2}.$

On obtient la relation suivante :

$$\frac{2\sqrt{r}}{(r+r_A)(r+r_B)(r+r_C)}\left(4r\sqrt{r_Ar_Br_C} - \sqrt{r_C}(r-r_A)(r-r_B) - \sqrt{r_B}(r-r_A)(r-r_C) - \sqrt{r_A}(r-r_B)(r-r_C)\right) = 0$$

Il « suffit » de résoudre l'équation (E) :

$$4r\sqrt{r_Ar_Br_C} - \sqrt{r_C}(r-r_A)(r-r_B) - \sqrt{r_B}(r-r_A)(r-r_C) - \sqrt{r_A}(r-r_B)(r-r_C) = 0$$

Soit

$$-(\sqrt{r_A}+\sqrt{r_B}+\sqrt{r_C})r^2 + r\left(4\sqrt{r_Ar_Br_C} + \sqrt{r_C}(r_A+r_B) + \sqrt{r_B}(r_A+r_C) + \sqrt{r_A}(r_B+r_C)\right) - \left(\sqrt{r_C}r_Ar_B + \sqrt{r_B}r_Ar_C + \sqrt{r_A}r_Br_C +\right) = 0$$

Pour résoudre cette équation « peu sympathique », on peut utiliser un logiciel de calcul formel ; on obtient les deux racines de l'équation (E).

On peut également être un peu astucieux et faire appel aux fonctions symétriques :

$\sigma_1 = \sqrt{r_A}+\sqrt{r_B}+\sqrt{r_C}$, $\sigma_2 = \sqrt{r_Ar_B}+\sqrt{r_Ar_C}+\sqrt{r_Br_C}$ et $\sigma_3 = \sqrt{r_Ar_Br_C}$.

L'équation (E) devient $\sigma_1 r^2 - (\sigma_1\sigma_2+\sigma_3)r + \sigma_2\sigma_3 = 0$ qui a deux solutions

$$r = \sigma_2 \text{ et } r = \frac{\sigma_3}{\sigma_1}.$$

Si on retrouve bien la solution $r = \sigma_2 = \sqrt{r_Ar_B}+\sqrt{r_Ar_C}+\sqrt{r_Br_C}$, il resterait alors à prouver que la deuxième racine est à exclure, ce qui est loin d'être évident, sauf dans des cas particuliers !

Retour au sommaire