

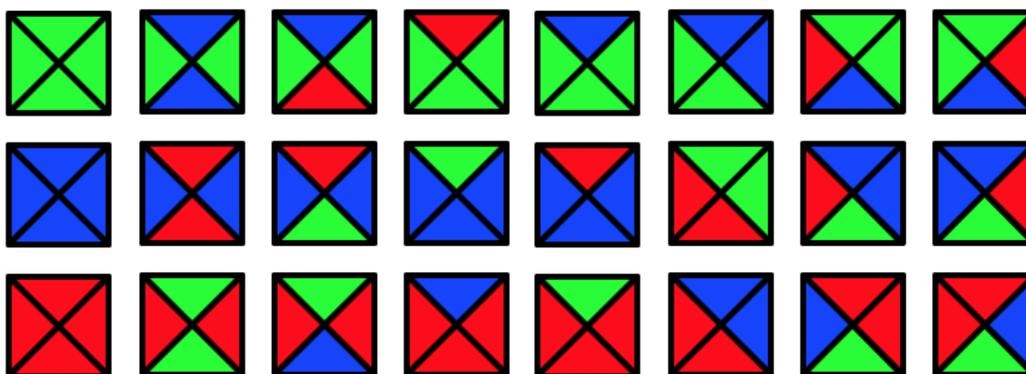
## AVEC LES CARRÉS DE MACMAHON

Groupe Jeux de l'APMEP Lorraine

Depuis quelque temps, joueuses et joueurs de la régionale s'intéressent à l'utilisation en classe et hors la classe de ces vingt-quatre carrés. Ils étaient présents dans [Jeux 1](#), ils sont le thème d'un des stands de notre [exposition régionale](#). En octobre 2019, le [diaporama](#) fait par des élèves mosellans participant à un atelier MATH.en.JEANS a été utilisé en atelier lors d'une action de [CANOPÉ](#) à Moulins-les-Metz.

Ils ont été évoqués dans les Petits Verts n°[50](#), n°[140](#), n°[146](#), n°[147](#) et l'envie de continuer les recherches s'est poursuivie.

Depuis décembre 2021, des ensembles de ces vingt-quatre pièces peuvent être acquis en passant par la [boutique](#) de notre site. Ce qui suit est extrait des [documents déposés](#) sur notre site et maintenant accessibles.

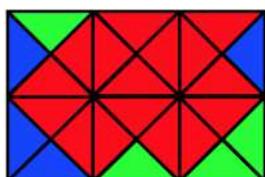


Deux carrés peuvent être placés l'un à côté de l'autre lorsque les côtés communs portent la même couleur.



### Des rectangles

En utilisant de plus en plus de pièces, des rectangles de plus en plus vastes seront réalisés. Ce sera l'occasion de rencontrer les décompositions des entiers de 1 à 24 en produit de deux entiers.



Dans ce rectangle, seize petits triangles sont rouges, quatre petits triangles sont verts et quatre petits triangles sont bleus. Ces dénombrements sont accessibles à des élèves de cycle 2 ( $4=1+1+2$  et  $16=2+4+3+2+3+2$ ). Un élève de cycle 3 dira que le rectangle est aux deux tiers rouge, le troisième tiers étant partagé en deux sixièmes : l'un est formé des deux triangles bleus, l'autre des deux triangles verts.

### Autres pistes de recherches

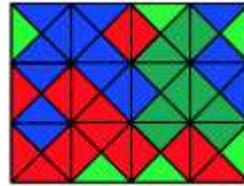
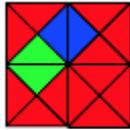
Construire un rectangle ou un carré de dimensions précisées dans lesquels les petits triangles forment une zone unicolore la plus vaste possible.

Construire un rectangle de dimensions précisées dans lesquels les petits triangles forment une zone unicolore rendant visible une forme précisée à l'avance (un pentamino, par exemple...).

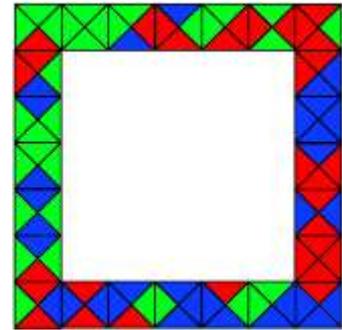
Construire un rectangle ou un carré « troué ».

**Des exemples**

12 est le nombre maximum de triangles rouges dans un carré formé de quatre pièces.

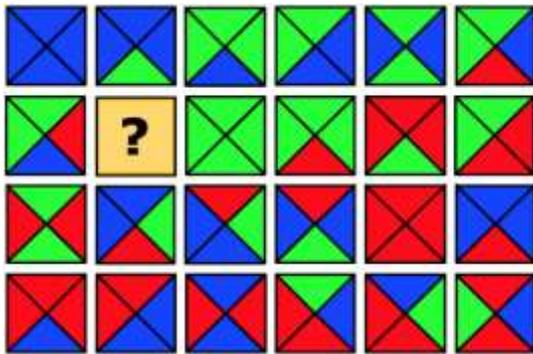


Les petits triangles verts rendent visible le pentamino « F ».  
Un tétramino « L » bleu est également présent.



Un carré troué.

**Recherche d'un algorithme de coloriage des pièces**

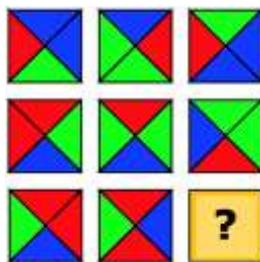


Quelle pièce a été retournée ?

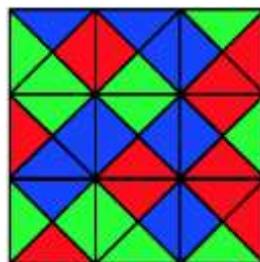
Les types de pièces	Les pièces								

Une aide pour la recherche

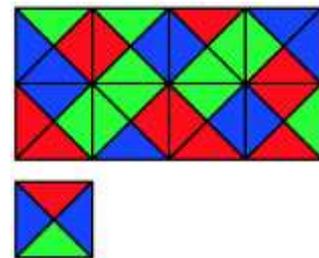
**Avec les neuf pièces tricolores**



Quelle pièce a été retournée ?



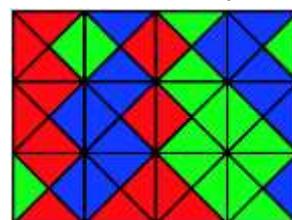
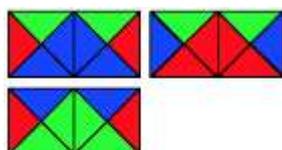
Toute pièce peut-elle être placée en position centrale ?



Huit pièces parmi les neuf peuvent-elles toujours former un rectangle 2x4 ?

**Symétries et carrés de MacMahon**

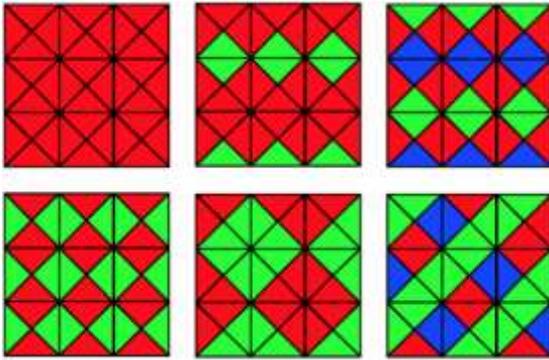
Douze pièces admettent un seul axe de symétrie, trois pièces admettent deux axes de symétrie, trois pièces admettent quatre axes de symétrie, six pièces admettent un centre de symétrie. Regroupées deux par deux, les six pièces n'admettant aucun élément de symétrie peuvent former trois rectangles admettant un axe de symétrie. Les douze pièces n'admettant qu'un seul axe de symétrie peuvent former un rectangle, les douze autres pièces également.



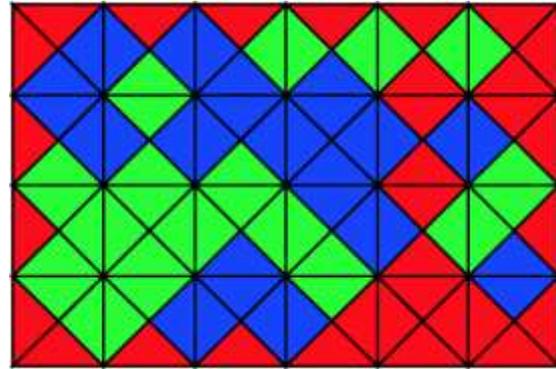
## Sur la route des pavages

Nous considérons qu'une pièce ou qu'un ensemble de pièces pave le plan lorsque qu'un certain nombre d'entre elles forment un rectangle dont les bords opposés sont de même couleur. Des translations de ces ensembles de pièces permettent de paver le plan. En utilisant des retournements, il ne sera pas nécessaire d'avoir les bords opposés de même couleur.

La recherche de rectangles à bordure unicolore fournit une première famille de tuiles de pavage. D'autres ont été trouvés.

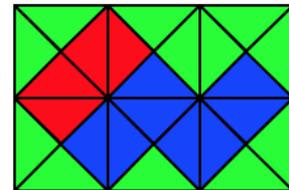
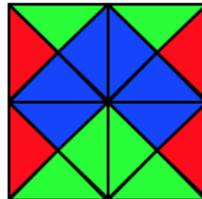
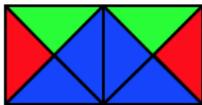


Tout type de pièce pave le plan.

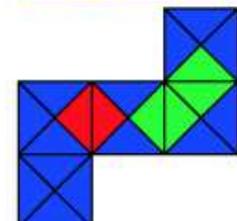
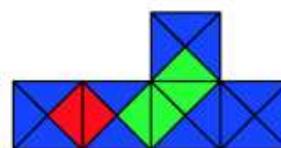
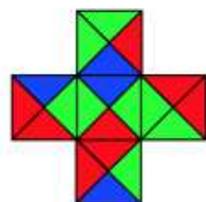
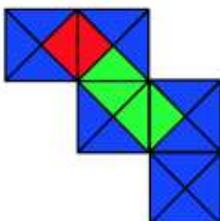
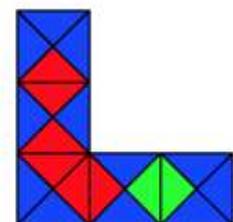
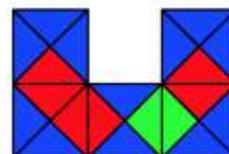
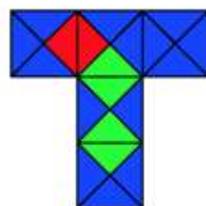
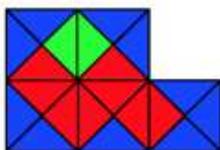
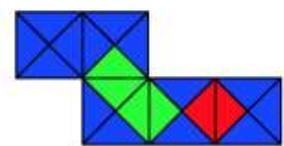
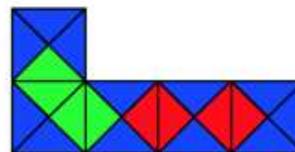
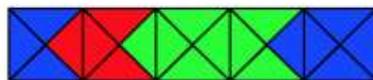
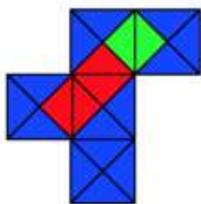


Ce rectangle à bordure unicolore pave le plan.

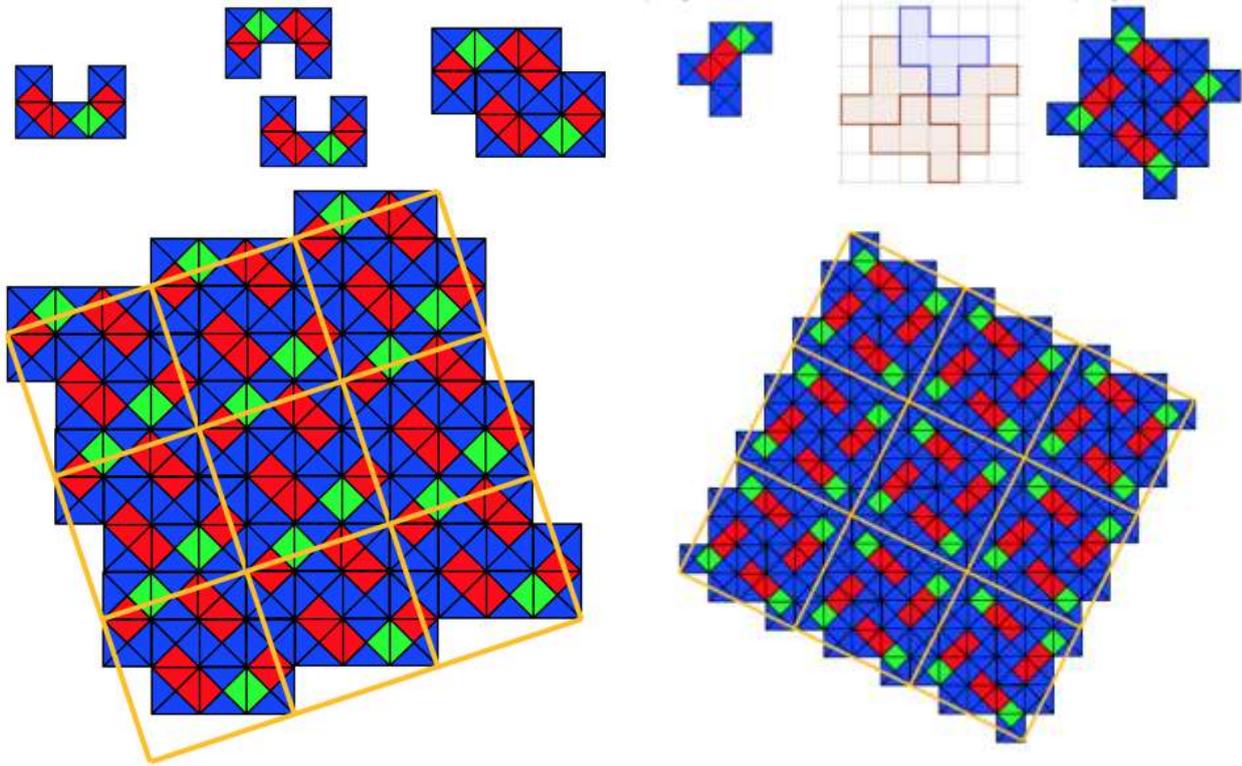
Voici d'autres tuiles de pavage.



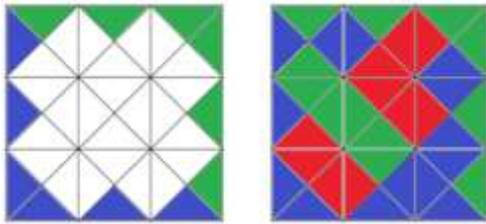
[Tout pentamino pave le plan.](#) Ces assemblages de cinq carrés de MacMahon sont donc des tuiles de pavage.



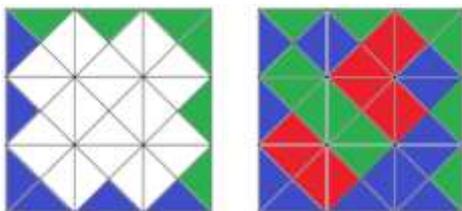
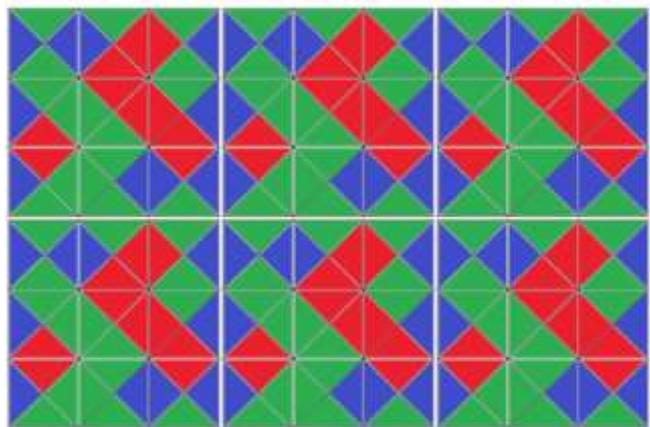
Le pavage obtenu contient lui-même un motif carré lui-même tuile de pavage.



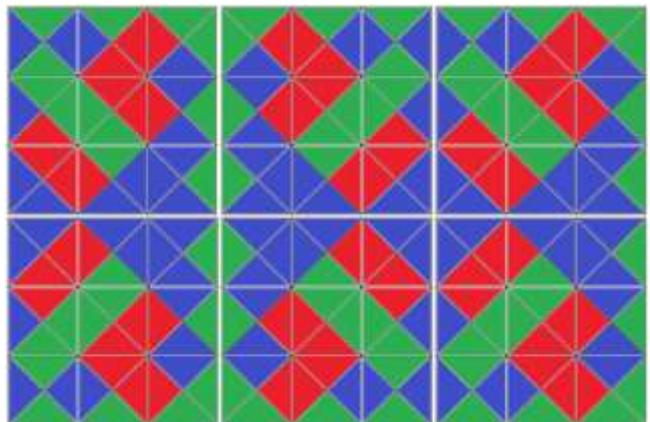
Des carrés formés de neuf pièces sont des générateurs de pavage.



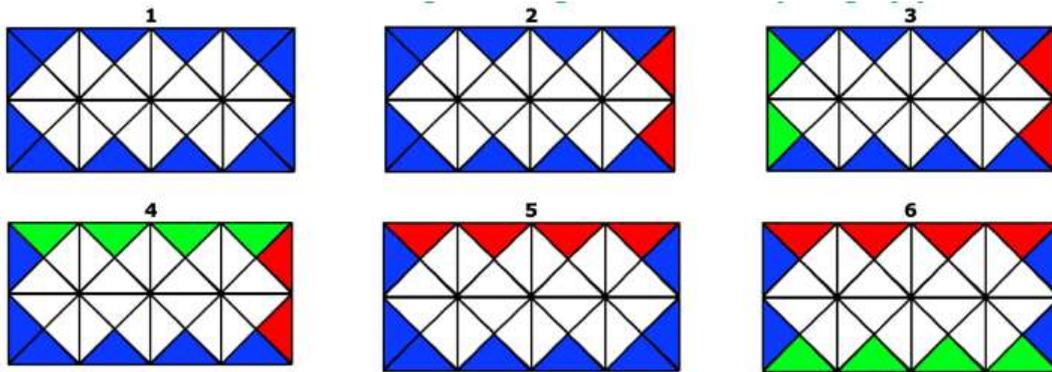
Pour un pavage utilisant des translations.



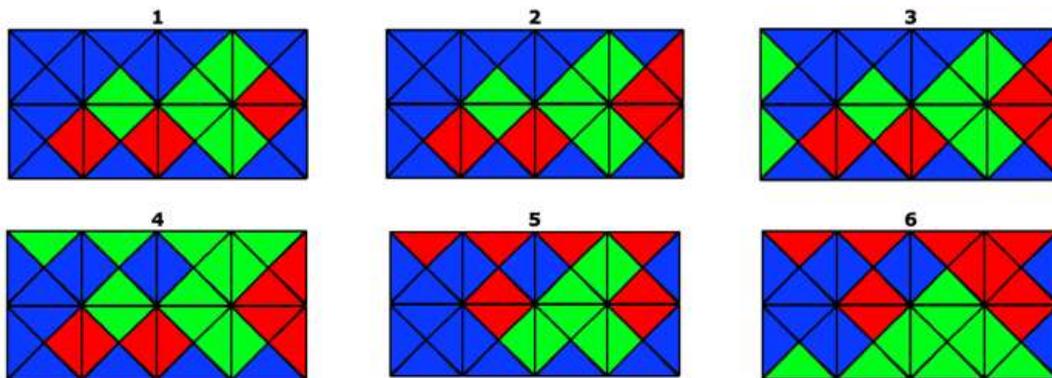
Pour un pavage utilisant symétries orthogonales.



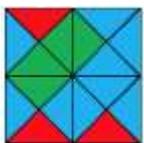
Des rectangles formés de huit pièces sont des générateurs de pavage.



À L'aide de quelles transformations (translations, symétries axiales et centrales, rotations) ces tuiles peuvent-elles paver le plan ?

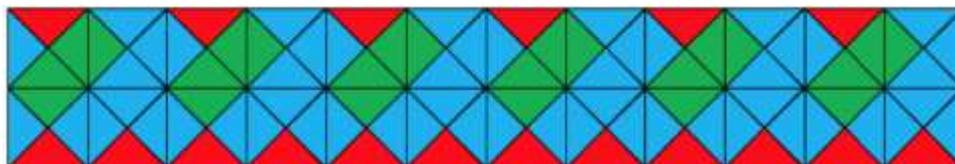


**Des frises**

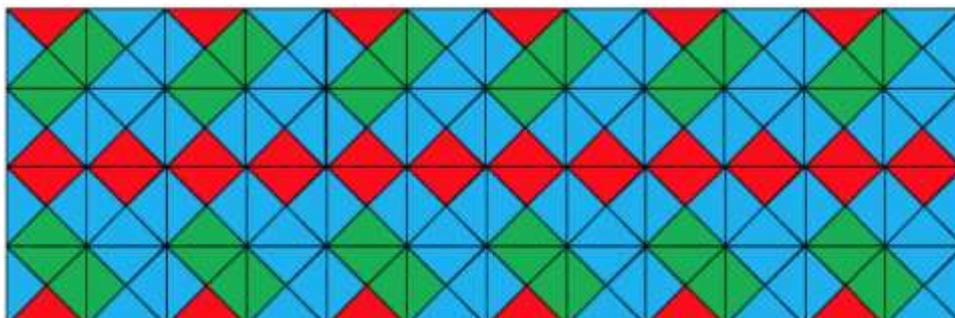


Des carrés formés de quatre pièces permettent la réalisation de [frises](#).

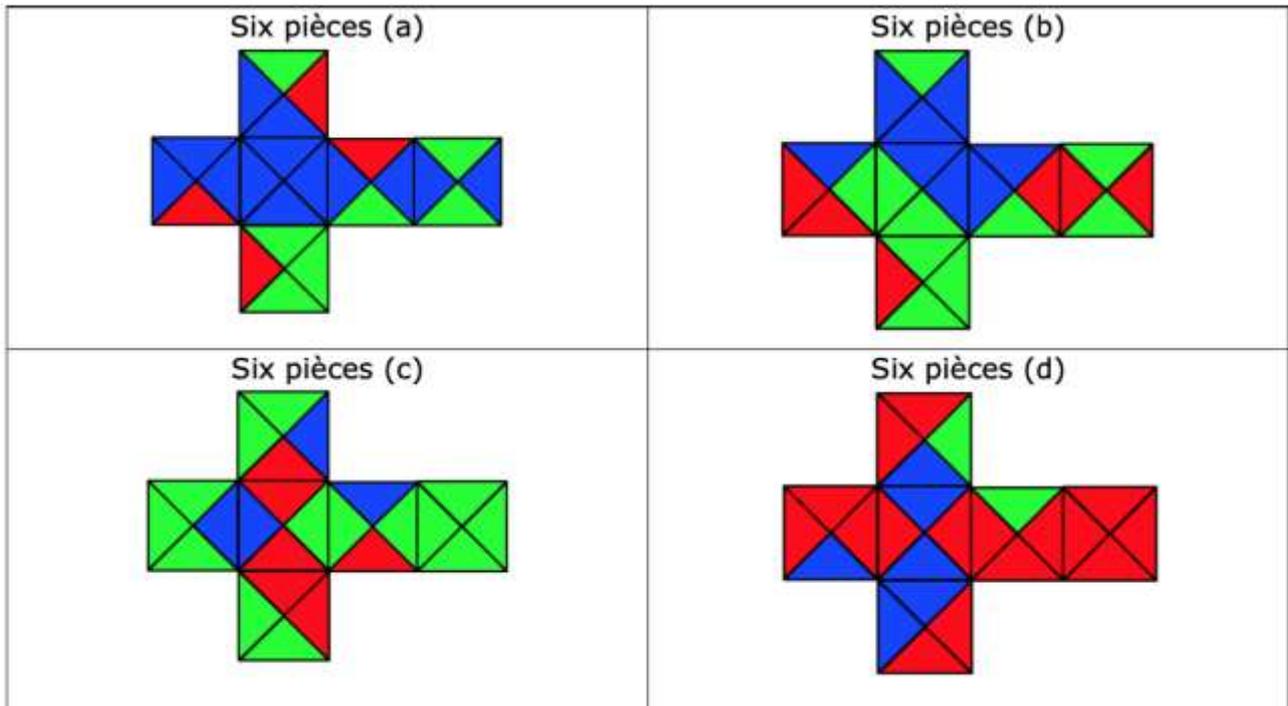
Cette frise est engendrée par une translation du motif.



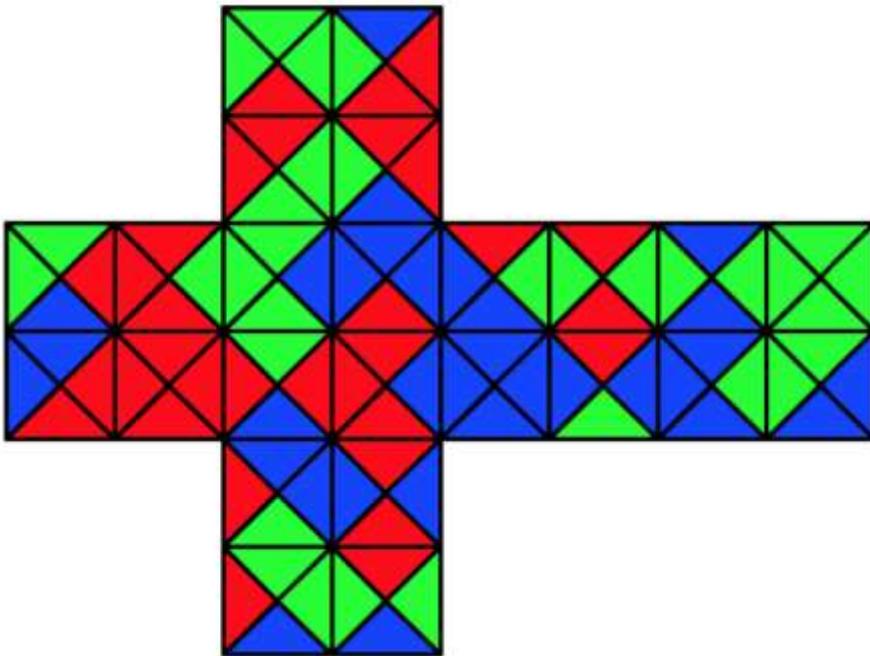
Cette frise est engendrée par une translation et une réflexion d'axe de même direction de la frise.



### Des patrons de cube



Les vingt-quatre pièces recouvrent six cubes.



Les vingt-quatre pièces recouvrent un cube.

Existe-il d'autres pavés recouverts par des carrés de MacMahon ?

La recherche continue, [l'espace de dépôt du site de la régionale](#) continuera à accueillir les futures découvertes.