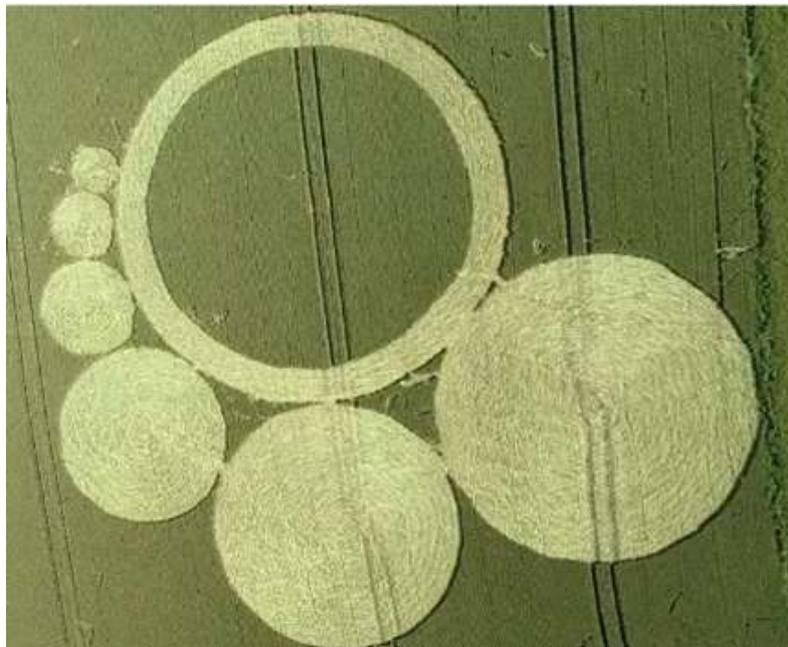


PROBLÈME D'APOLLONIUS, CROP CIRCLE ET FAKENEWS.

Emmanuel Claisse
Lycée Margueritte, Verdun



Cet article fait suite à celui écrit par Fathi Drissi dans le Petit Vert n°127 intitulé « un crop circle en Meuse » et dans lequel il tente d'écrire l'histoire de ce crop avec beaucoup de brio.

Les faits

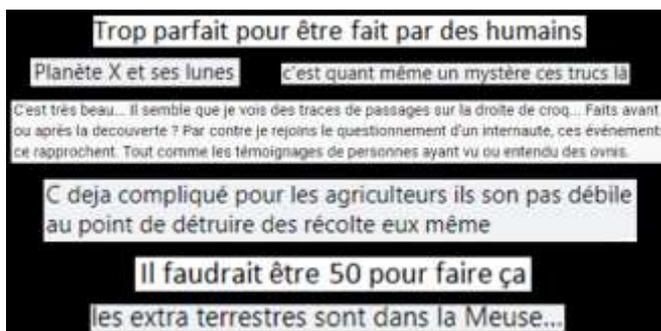
Dans la nuit du 28 au 29 juin 2021 apparaissent des cercles géants dans un champ de blé appartenant à Emmanuel Claisse sur la commune de Chauvency-le-Château dans la Meuse. Puis les 29 et 30 juin, deux drones filment la scène : [drone 1](#), [drone 2](#).

Umberto Molinaro, le « spécialiste » français des cercles de culture - appelés crop circle -, se déplace sur le terrain et poste [une vidéo étonnante](#) le 22 juillet¹ dans laquelle il certifie « vrai » le crop circle : celui-ci est bien d'origine extra-terrestre et réalisé par des Arcturiens².

Par la suite, d'innombrables personnes, parfois par dizaines, viennent de toute la région et des pays voisins (Belgique, Allemagne, Luxembourg et même Hollande) afin de contempler, de se « ressourcer » ou encore de mesurer les bovis³ sur le lieu du crop circle. Les commentaires, des plus sensés aux plus loufoques, sont nombreux sur les réseaux sociaux dont voici quelques captures d'écrans.

² Les Arcturiens seraient les êtres de la Galaxie les plus évolués et voyageraient à travers l'univers en transcendant les 4^{ème} et 5^{ème} dimensions.

³ À savoir : le bovis est une unité de mesure pseudo-scientifique qui permettrait de mesurer un supposé taux vibratoire ou la supposée énergie cosmo-tellurique d'un lieu ou d'un corps.



Le directeur de l'agence locale de l'Est Républicain se déplace afin de faire son enquête et publie une [double page](#). Comme le dit très bien Fathi Drissi, cet article soulève davantage de questions qu'il n'apporte de réponses mais c'était voulu puisque le but était de créer une fakenews.

Ensuite, le lycée Margueritte invite la presse locale le 14 septembre afin de révéler [la vérité sur le crop circle](#) et une [vidéo est dévoilée](#) : il s'agit d'une création de l'atelier MATH.en.JEANS du lycée. Puis le youtuber Astronogeeek poste également [une vidéo sur le crop](#) de Chauvency le Château. Ces deux vidéos atteignent rapidement les 500 000 vues, dépassant toutes les espérances de l'atelier MATH.en.JEANS.

Le « spécialiste » des crop circle, visiblement très agacé d'être tombé dans le piège, publie une seconde vidéo expliquant que la vidéo du lycée est truquée et qu'elle met en scène un faux prof de maths accompagné par de faux élèves. Puis il retire cette seconde vidéo lorsque les preuves sont devenues accablantes. Il poste alors une troisième vidéo dans laquelle il décrit que les Acturiens se sont incarnés dans le corps d'élèves et de leur professeur, vidéo également retirée depuis.

Le thème de l'atelier MATH.en.JEANS

L'atelier MATH.en.JEANS du lycée Margueritte (Verdun) a débuté en septembre 2020 avec le thème suivant « cercles tangents et problème d'Apollonius ». D'une certaine façon, il est le complément d'un atelier du lycée Margueritte célébrant le centenaire de la Bataille de Verdun, atelier intitulé « *La construction d'Apollonius au service du repérage par le son pendant la Première Guerre Mondiale* » dont l'histoire a été racontée dans un article paru en 2021[3] et fut l'occasion d'un tournage vidéo sur le terrain des Champs de Bataille de Verdun [4].

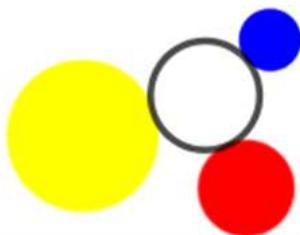


Figure 1

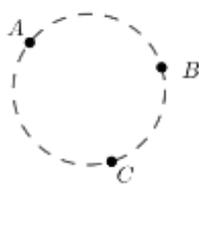
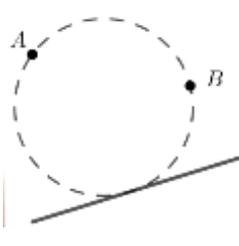
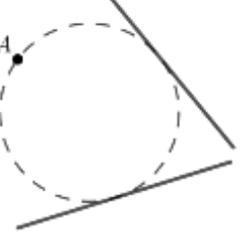
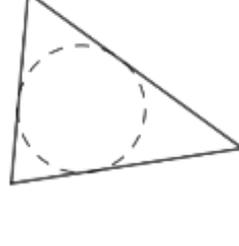
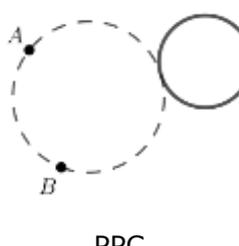
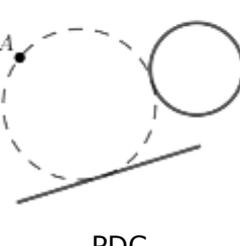
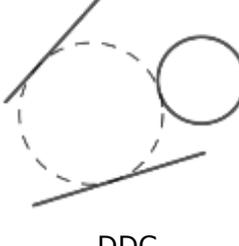
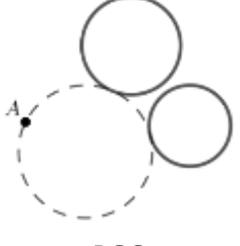
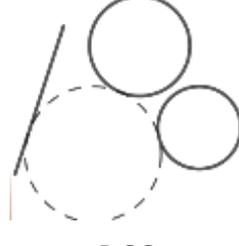
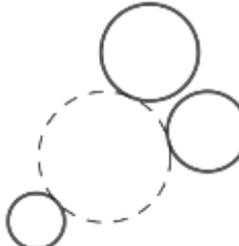
Le problème qui nous a intéressés dans cet atelier est énoncé par le mathématicien grec Apollonius de Perge (III^{ème} siècle av J.C) dans le livre perdu *Traité des contacts (Tangences)* : « étant donnés trois cercles quelconques, déterminer un cercle tangent à ces trois cercles ». [fig. 1]

Par ailleurs, la Fédération des Communautés de Communes de Verdun désirait travailler sur les Fakenews avec des élèves du lycée Margueritte. Nous avons eu alors l'idée de travailler sur la figure d'un crop circle (cercles de culture) afin de générer un certain nombre de fausses informations. Le mot d'ordre était : « secret absolu » et le secret a été tenu tout l'été.

Un peu d'histoire

Pappus décrit dans le livre VII de sa *Collection* le problème des cercles tangents [9]. Il était le dixième du *Traité des Contacts*, ouvrage perdu d'Apollonius. Ce traité s'intéressait au problème suivant : si on se donne trois éléments quelconques parmi des points, des droites ou des cercles, construire un cercle passant par le ou les points donnés et tangent aux droites et aux

cercles donnés. Nous obtenons alors dix problèmes répertoriés dans le tableau ci-dessous pour lequel sont croisés le nombre de points par lequel passe le cercle cherché avec le nombre de cercles auxquels il est tangent. Le symbolisme utilisé est le suivant : par exemple, le problème PDC (Point-Droite-Cercle) concerne la recherche d'un cercle passant par un point donné, tangent à la droite et au cercle donnés.

	3 points	2 points	1 point	0 point
0 cercle	 PPP 1 solution	 PPD 2 solutions	 PDD 2 solutions	 DDD 4 solutions
1 cercle		 PPC 2 solutions	 PDC 4 solutions	 DDC 4 solutions
2 cercles			 PCC 4 solutions	 DCC 4 solutions
3 cercles				 CCC 8 solutions

Remarquons que les solutions présentées dans le tableau ci-dessus ne sont pas uniques et varient selon la configuration des éléments de départ, le nombre indiqué dans le tableau étant le nombre maximal de solutions. En effet, lorsque les trois points sont alignés (problème PPP), il n'y a aucune solution alors que lorsqu'ils ne le sont pas, il existe au maximum une solution : le cercle circonscrit.

Un autre exemple bien connu est lorsqu'on se donne trois droites (problème DDD) : si elles sont parallèles, il n'existe aucune solution et dans le cas où elles sont deux à deux sécantes, il s'agit du problème de la construction des cercles inscrits et exinscrits avec 4 solutions (fig. 2).

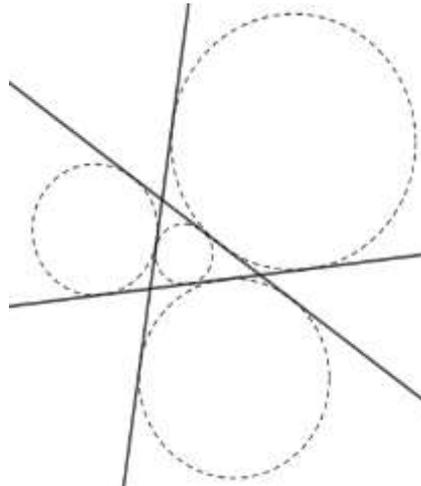


Figure 2

Le problème PCC (fig.3) est celui évoqué au début de cet article, il a contribué à sauver la Bataille de Verdun lors de la Grande Guerre et a fait l'objet d'un autre atelier MATH.en.JEANS.

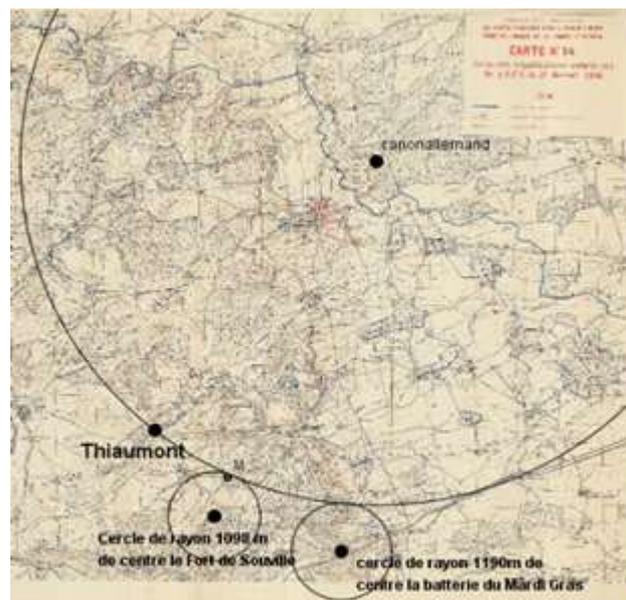


Figure 3

L'ensemble des problèmes est étudié par le français François Viète qui lance un défi en 1595 au mathématicien belge Adrien Romain afin de résoudre le problème des contacts d'Apollonius. La même année, Adrien Romain y répond et détermine le centre du cercle tangent comme intersection de deux hyperboles. Cependant, Viète lui reproche que sa solution n'est pas conforme aux méthodes des Anciens car le recours aux coniques ne peut être accepté dans un problème plan. En 1597, Viète résout les dix problèmes par une construction à la règle et au compas et les publie dans l'Apollonius Gallus [10] en 1600. Toutefois, Viète ne discute pas de tous les cas particuliers et c'est Descartes en 1637 qui les traite à l'aide de l'algèbre. C'est alors que les mathématiciens vont s'affronter en opposant géométrie synthétique (appelée aussi géométrie pure) et géométrie analytique. En fait, par la suite, de nombreux mathématiciens vont tester leur nouvelle géométrie sur le dixième problème d'Apollonius, le problème CCC.

Le problème CCC

Il est intéressant de savoir que l'étude du problème CCC s'effectue à l'aide d'autres problèmes selon l'organigramme suivant : PPP → PPC → PCC → CCC.

Le nombre et la richesse des problèmes soulevés par le Traité des Contacts étant considérables, nous avons travaillé en 2020-2021 sur le dixième problème, le problème des trois cercles CCC. Nous n'avons pas étudié toutes les conditions d'existence mais certaines furent rapidement écartées puisque lorsque les cercles sont dans l'une des configurations de la figure 4 ci-dessous, il n'y a aucune solution possible.



Figure 4

L'atelier a porté exclusivement sur l'étude de la configuration de la figure 5. Dans un premier temps, les élèves ont travaillé à main levée ou à l'aide du compas. Ils ont facilement découvert les huit cas de figures possibles.

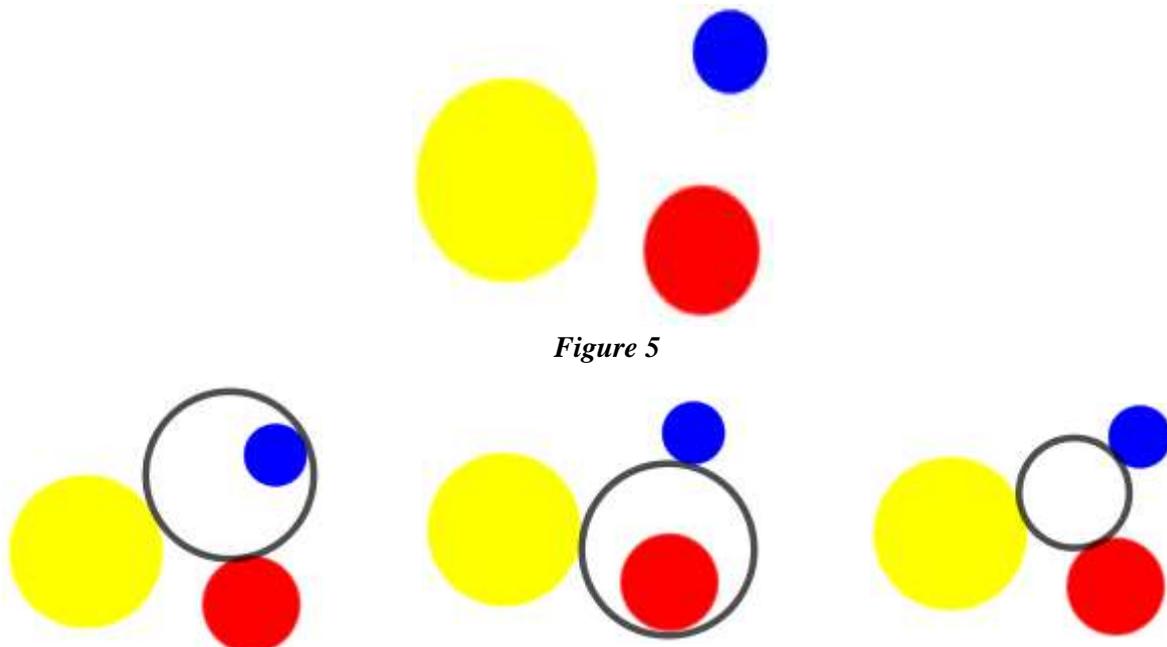
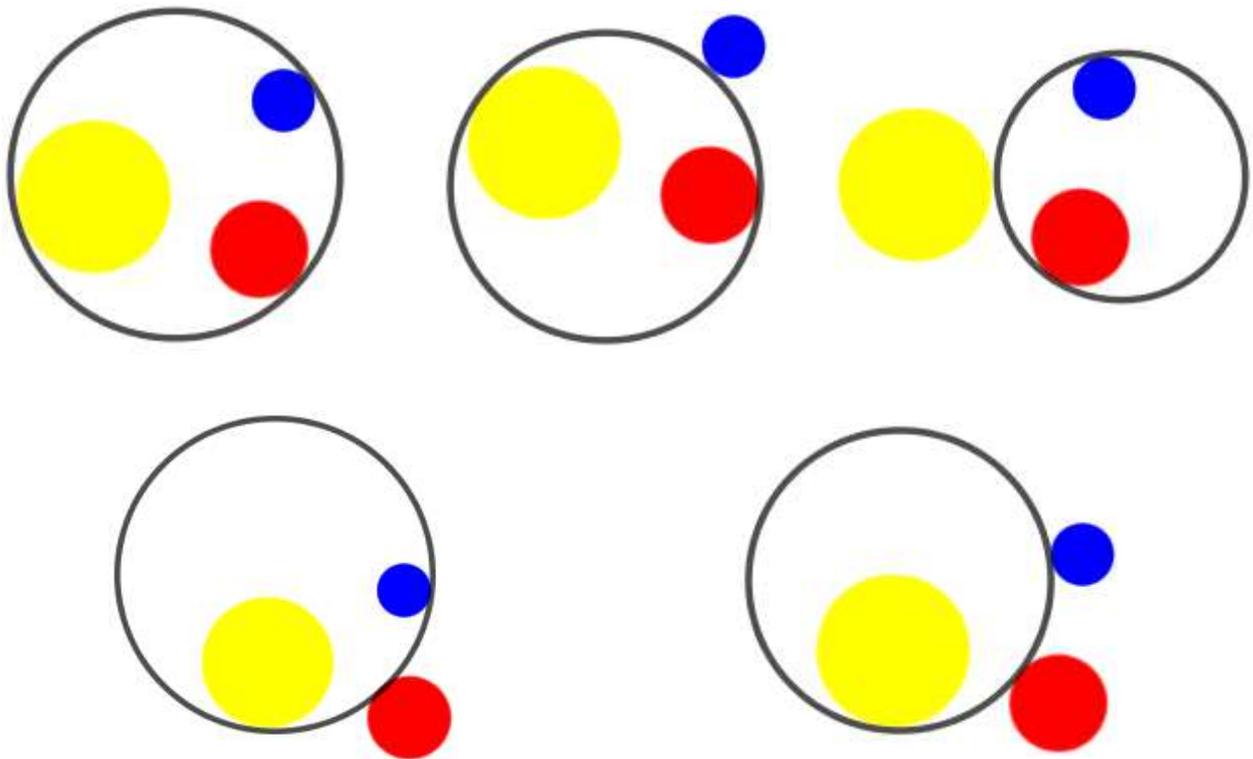


Figure 5



Étude d'un cas particulier

Le cas où les trois cercles ont le même rayon (fig. 6) permet une construction simple et rapide du cercle tangent aux trois cercles. En effet, il suffit de construire le centre O du cercle circonscrit au triangle formé par les centres A, B, C des trois cercles puis de tracer les segments $[OA], [OB]$ et $[OC]$. Le cercle tangent est alors le cercle de centre O et passant par I, J, K .

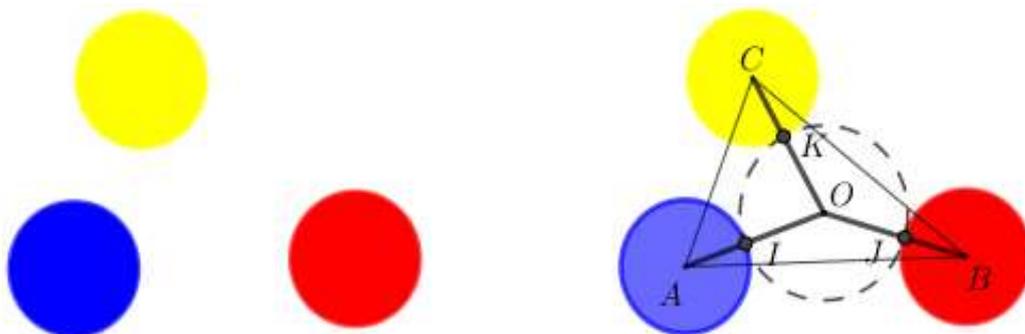


Figure 6

Étude du cas général

Le cas général des trois cercles tangents étant complexe, il nous fallait auparavant réaliser la construction d'un cercle tangent à un cercle donné, puis à deux cercles tangents et enfin trois.

Cercle tangent à un cercle

Une première propriété que nous avons étudiée et qui nous a servi par la suite est l'alignement entre les centres des cercles tangents et le point de tangence (fig. 7)

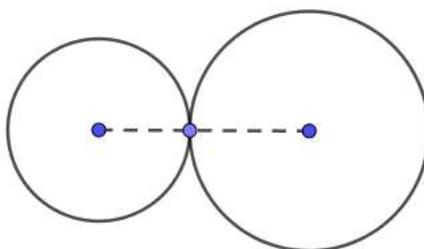


Figure 7

Cercle tangent à deux cercles

Dans cette partie, un certain nombre de constructions ont été réalisées à la règle et au compas.

Étant donnés deux cercles C et C' , nous avons construit approximativement un cercle C'' tangent extérieurement à C et C' aux points T et T' . Cette construction nous a donné l'idée de la construction précise (méthode par Analyse-Synthèse). En observant le problème résolu, on voit aisément qu'une homothétie h de centre T transforme le cercle C en C'' et qu'une autre homothétie h' de centre T' transforme C'' en C' . Ainsi, on peut passer directement de C à C' par une homothétie h'' composée de h suivie de h' . Puisque $h''(O) = O'$ alors le centre I de l'homothétie h'' est aligné avec O et O' .

De plus, la composée de deux homothéties est une homothétie dont le centre est aligné avec les centres des homothéties. On en déduit que la droite (TT') passe par I (fig. 8)

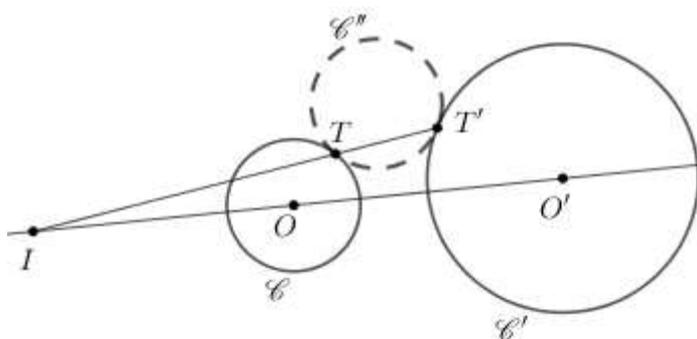
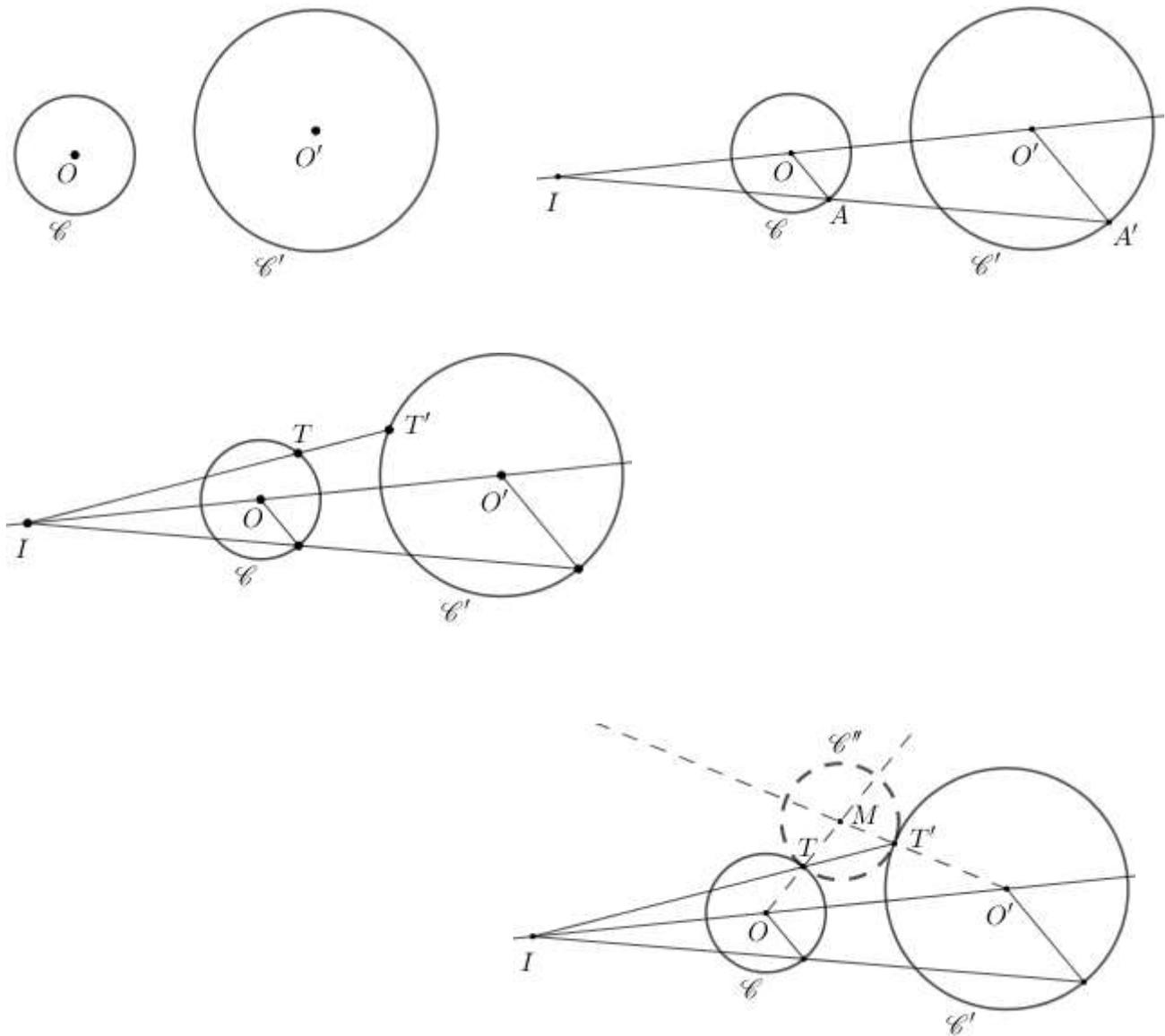


Figure 8

Et voici l'ordre de la construction (figures ci-dessous) : connaissant les deux cercles C et C' , on construit deux rayons parallèles $[OA]$ et $[O'A']$ parallèles, ce qui permet de construire le point I , intersection des droites (OO') et (AA') . Ensuite, il suffit de placer un point quelconque T sur le cercle C puis de tracer la droite (IT) qui coupe le cercle C' en T' puis construire le point M , intersection des droites (OT) et $(O'T')$. Le cercle C'' de centre M passant par T et T' est alors tangent aux cercles C et C' .



Jusque-là, toutes les figures ont été construites à la règle et au compas. L'avantage d'utiliser ces instruments est certainement fondamental et fait partie de ce qu'on appelle la cognition incarnée dont on commence à mesurer l'importance par rapport à l'outil informatique, voir par exemple l'article d'E. Claisse sur une *Comparaison entre manipulation physique et virtuelle* [5]. Néanmoins, afin de gagner du temps, nous avons décidé de travailler par la suite sur le logiciel GeoGebra avec lequel les expériences géométriques sont aisées et rapides.

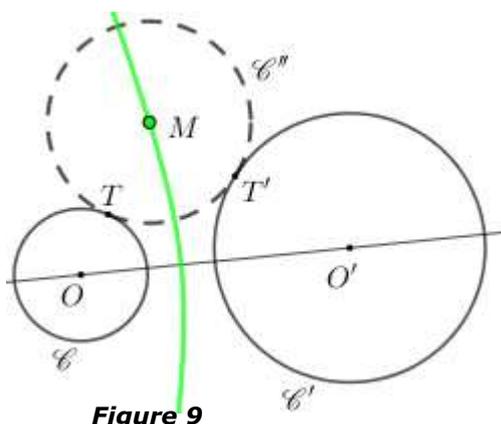


Figure 9

En construisant la figure à l'aide du logiciel, cela nous a permis de déplacer le point T et d'observer le lieu des points M qui ressemble à une courbe déjà rencontrée (fig. 9).

En effet, le point M vérifie l'égalité $MO - MO' = MT + TO - MT' - T'O' = TO - T'O' = R - R'$ (où R et R' sont les rayons des cercles C et C'). On en déduit ainsi l'égalité $MO - MO' = R - R'$. On reconnaît ici une propriété caractéristique de l'hyperbole : étant donné un nombre $k > 0$ et deux points F et F' appelés foyers, l'ensemble des points M vérifiant $|MF - MF'| = k$ est une hyperbole. Dans notre cas, l'ensemble des points M vérifiant l'égalité $MO - MO' = R - R'$ est une branche d'hyperbole de foyers O et O' . Nous avons dorénavant un moyen de construire l'ensemble des cercles tangents à deux cercles donnés : en notant O et O' leur centre, il suffit de construire les points J et J' intersections de $[OO']$ avec les deux cercles puis le milieu K de $[JJ']$ et en utilisant l'outil geogebra « hyperbole », on construit l'hyperbole de foyers O et O' passant par K (fig. 10).

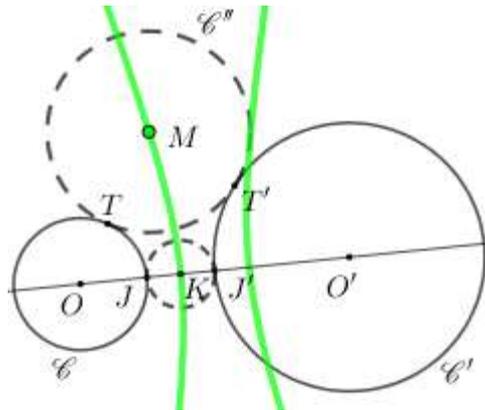


Figure 10

Remarque importante : la première branche d'hyperbole est le lieu des centres des cercles tangents extérieurement à C et C' alors que la seconde branche est le lieu des centres des cercles tangents intérieurement (fig. 11). En effet, si un cercle est tangent à C et C' alors, en notant T et T' les deux points de tangence, $MT = MT' \Leftrightarrow MO + OT = MO' + O'T' \Leftrightarrow MO - MO' = O'T' - OT = R - R'$. Ainsi, $MO - MO' = R - R'$ et le point M est sur la seconde branche d'hyperbole.

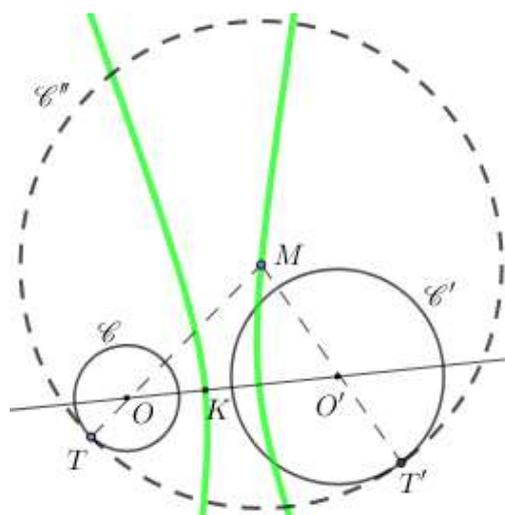


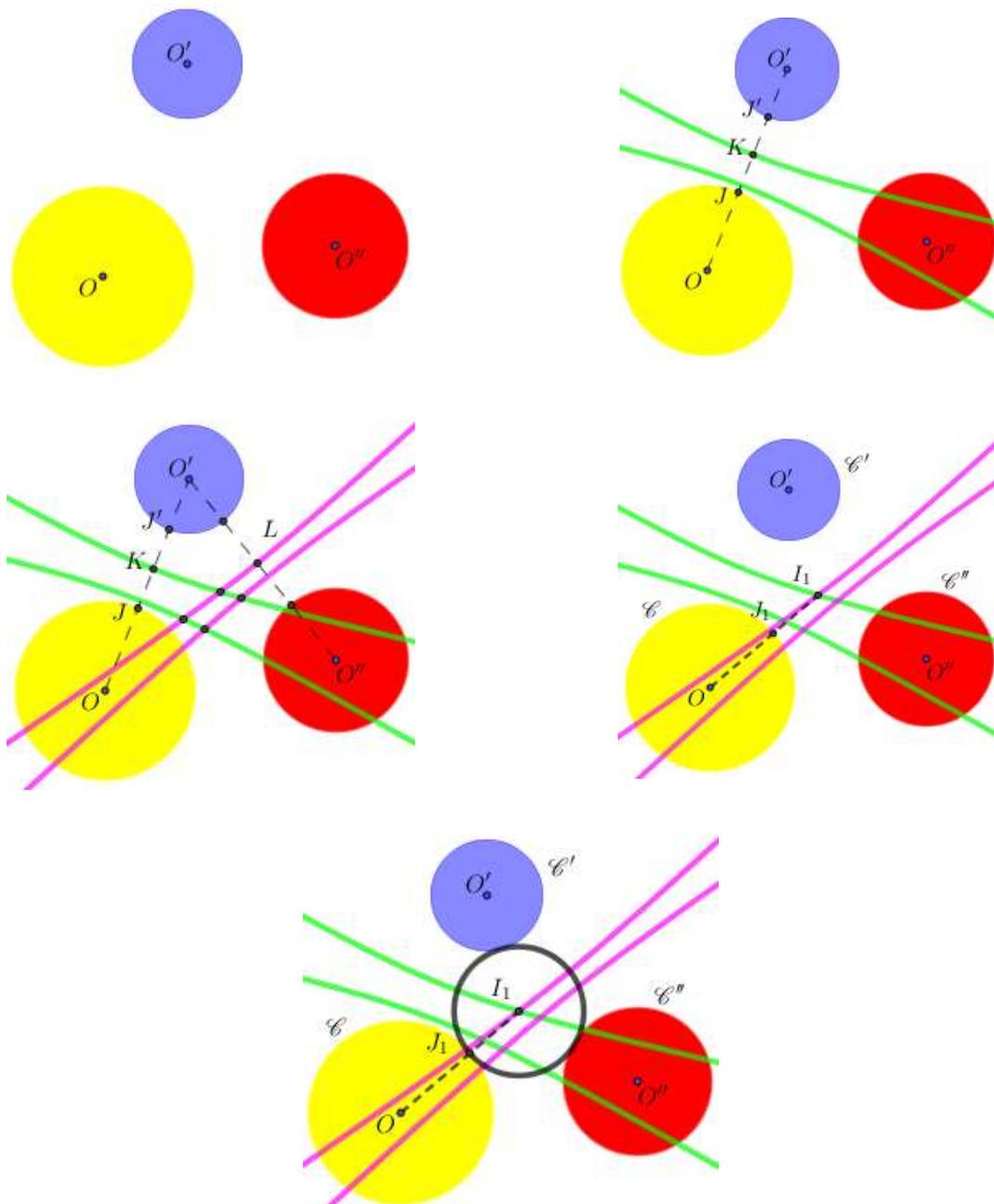
Figure 11

Cercle tangent à trois cercles

Nous voilà désormais outillés afin de donner une solution au problème CCC d'Apollonius : comment construire un cercle tangent extérieurement à trois cercles donnés ?

Nous avons à nouveau utilisé les hyperboles (figures ci-dessous) : on construit l'hyperbole (de couleur verte) de foyers O et O' passant par K comme dans le paragraphe précédent.

En utilisant le même procédé, on construit l'hyperbole (de couleur mauve) de foyers O' et O'' passant par le point L (construit comme le point K) dont une des branches correspond à l'ensemble des centres des cercles tangents extérieurement aux cercles bleu et rouge. Nous obtenons alors quatre points d'intersection I_1, I_2, I_3 et I_4 entre les deux hyperboles dont un seul correspond à l'intersection des deux branches adéquates - ici I_1 - permettant d'obtenir le centre du cercle recherché. Il suffit alors de tracer le segment $O I_1$ qui coupe le cercle jaune C en J_1 et tracer le cercle C_1 de centre I_1 passant par J_1 : nous avons ainsi démontré l'unicité du cercle tangent extérieurement aux trois cercles donnés.



Macro « cercle tangent à trois cercles »

La figure précédente nous a permis de construire un nouvel outil GeoGebra - une macro - qui, à partir de trois cercles permet d'obtenir un cercle qui leur est tangent extérieurement. Afin que celle-ci fonctionne dans tous les cas de figures, il nous a fallu au préalable construire (fig. 12) un second segment $O I_2$ reliant le centre O à la seconde intersection I_2 des hyperboles et qui coupe le cercle jaune en J_2 , ceci afin de construire le cercle C_2 de centre I_2 passant par J_2 : ce cercle est tangent au cercle jaune (mais pas aux autres cercles).

Enfin, nous avons construit (fig. 13) les deux autres cercles C_3 et C_4 de centre I_3 et I_4 tangents au cercle jaune.

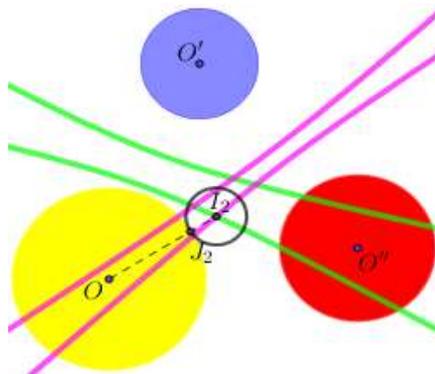


Figure 12

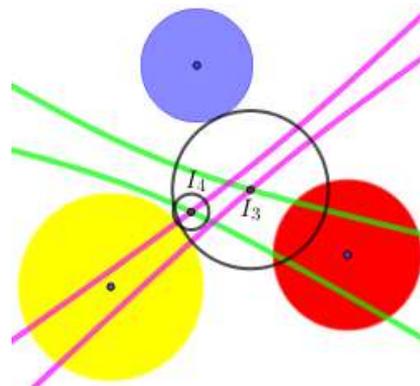
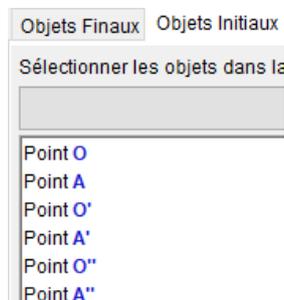
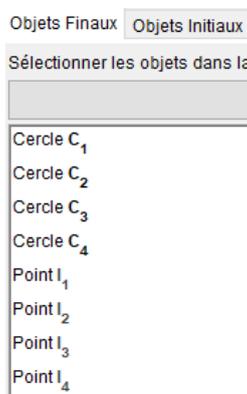


Figure 13

Ceci nous a permis de construire un nouvel outil (macro) « cercle tangent à trois cercles » pour lequel les points A, B, C sont les points qui ont permis de construire les cercles C, C' et C'' .



L'idéal aurait été d'afficher uniquement le cercle tangent aux trois autres en utilisant les conditions d'affichage mais nous n'y sommes pas parvenus.

Remarque : le point I_2 permet ici de construire le cercle tangent intérieurement aux trois cercles (fig. 14)

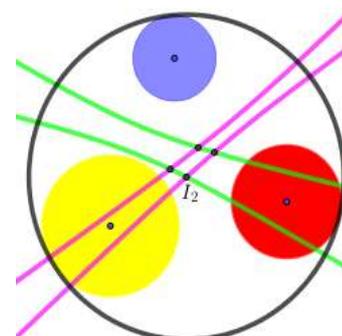


Figure 14



Les dessins d'élèves ont été nombreux mais n'avaient finalement pas vraiment de finalité, certains se rapprochant du célèbre tableau de Vassily Kandinsky et nous avons décidé de nous concentrer sur la configuration de Descartes.

Configuration de Descartes, cercle de Soddy et baderne d'Apollonius

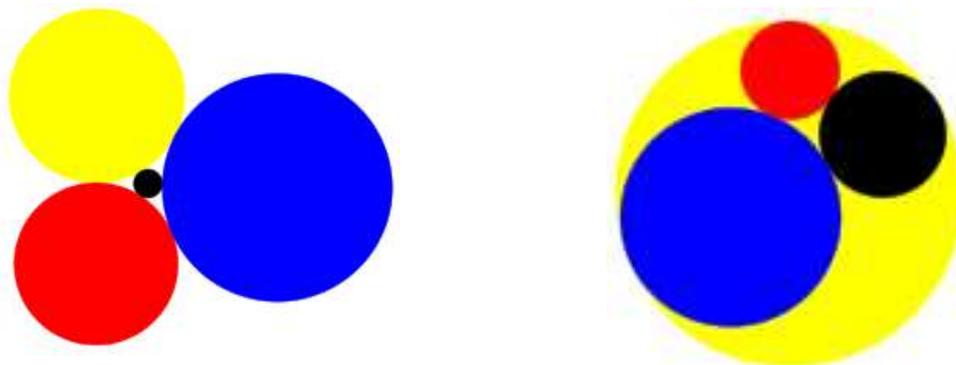


Figure 15

La configuration de Descartes (fig. 15) est un cas particulier du problème CCC d'Apollonius et consiste en une figure formée par quatre cercles tangents pour laquelle chacun des cercles est tangent aux trois autres intérieurement ou extérieurement.

Nous nous sommes intéressés alors au problème suivant : soit un triangle ABC , peut-on construire trois cercles tangents extérieurement centrés sur les sommets du triangle (fig. 16).

En construisant une figure approximative et en notant $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ et r_A, r_B, r_C les rayons des cercles tangents de centre respectif A, B, C , nous obtenons les égalités

$$\begin{cases} a = r_B + r_C \\ b = r_A + r_C \\ c = r_A + r_B \end{cases}, \text{ ce qui permet de calculer } -a + b + c = 2r_A, a - b + c = 2r_B \text{ et } a + b - c = 2r_C$$

soit $r_A = \frac{-a+b+c}{2}$, $r_B = \frac{a-b+c}{2}$ et $r_C = \frac{a+b-c}{2}$: ces relations prouvent que la solution est unique, elles permettent également la construction précise de ces cercles.

La construction des trois cercles réalisée, comment construire un triangle - appelé triangle de Soddy - tangent intérieurement à ceux-ci (fig. 17) ?

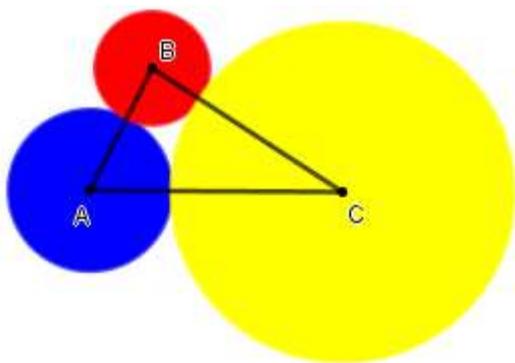


Figure 16

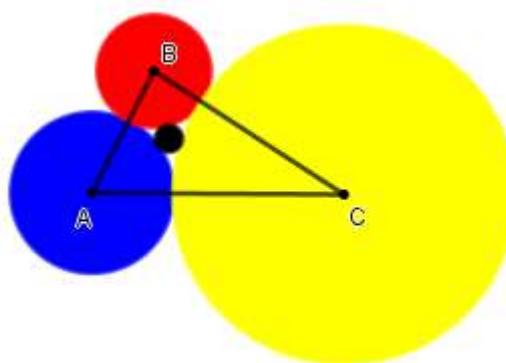


Figure 17

Notons S le centre de Soddy de ce cercle (fig. 18). Calculons $SA - SB = r_A + r - r_B - r = r_A - r_B$: ce nombre ne dépend pas de S donc le point S est sur une branche d'hyperbole (de couleur verte), de foyers A et B . De plus, l'intersection T_1 des cercles de centre A et B vérifie $T_1A - T_1B = r_A - r_B$ donc l'hyperbole passe par T_1 .

De même, $SB - SC = r_B - r_C$: le point S est donc sur l'hyperbole (de couleur mauve) (fig. 19), de foyers B et C , passant par T_2 , intersection des cercles de centre B et C .

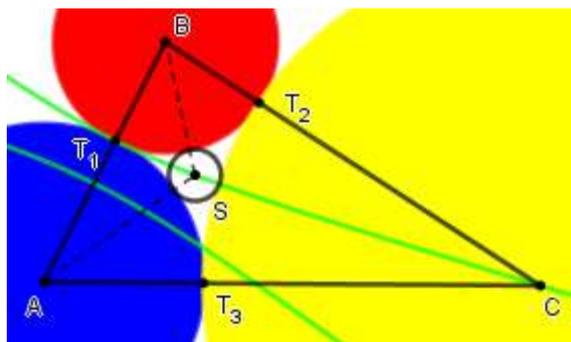


Figure 18

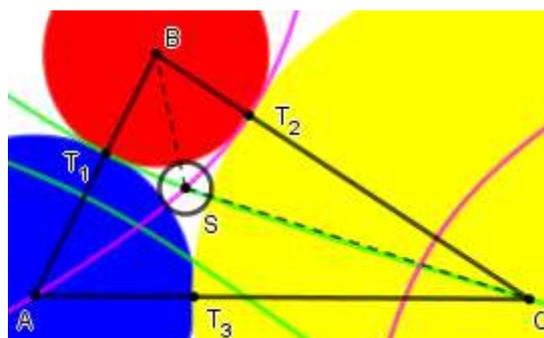


Figure 19

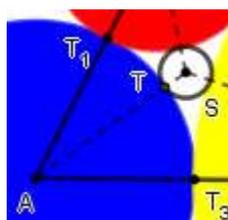


Figure 20

Le centre de Soddy S est situé à l'intersection des hyperboles. La construction du cercle de Soddy (fig. 20) s'effectue en traçant le segment $[AS]$ qui coupe le cercle de centre A en un point T . Il suffit alors de tracer le cercle de centre S et passant par T .

Cette construction nous a permis de fabriquer un outil GeoGebra (une macro) qui, connaissant trois points, permet de construire les hyperboles.

Le point S permet de définir trois nouveaux triangles SAB , SBC et SAC qui ont chacun un cercle de Soddy facilement constructible à l'aide de notre macro (fig. 21).

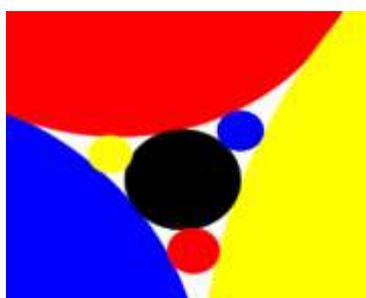
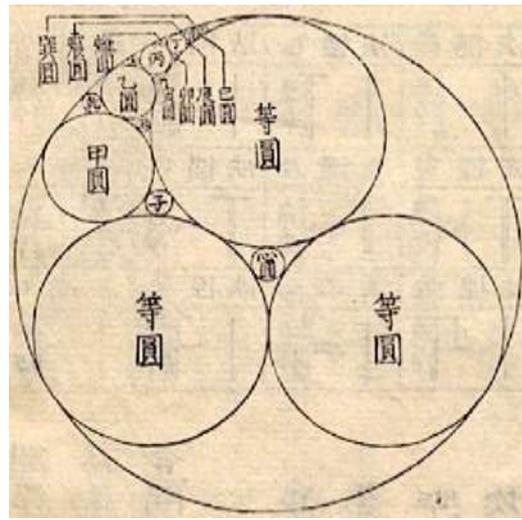
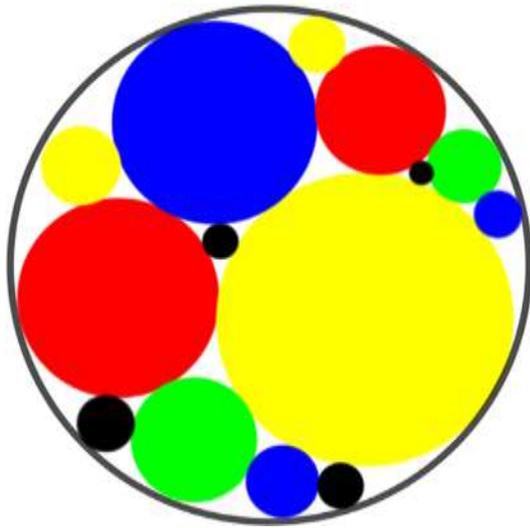


Figure 21

En répétant ce procédé, nous avons obtenu quelques belles figures dont celles ci-dessous qui nous font penser à des sangakus japonais (Shinpeki Sanpo 1789).



On peut réitérer ce procédé à l'infini et on obtient une figure fractale appelée baderne d'Apollonius.

Pour approfondir, on pourra lire l'article [intitulé « baderne d'Apollonius »](#).

Voici quelques belles réalisations en architecture.



Abbaye de Vaux de Cernay



Central Green Park, Philadelphie



Vitrail du trésor par Jean-Michel Othoniel



Grille de la Samaritaine, rue de Rivoli, Paris

Néanmoins, bien que notre macro permettait de construire rapidement de nombreuses figures, nous avons décidé d'utiliser un nouvel outil qui va se révéler remarquable à la fois par son côté

[Retour au sommaire](#)

novateur mais également par sa prodigieuse efficacité pour la construction de configurations de Descartes.

Découverte de l'inversion

La découverte de l'inversion s'est déroulée de manière assez libre. Dans le menu déroulant des transformations du plan du logiciel GeoGebra, on trouve l'outil suivant : . En passant le curseur dessus, cela permet de découvrir l'aide : « *point et cercle dont le centre est le pôle et le carré du rayon la puissance* ».

Ainsi, on peut placer un point O puis construire un curseur r qui permet de construire un cercle de centre O et de rayon r . Puis on place un point quelconque M et on construit l'image de M par l'inversion de pôle O et de puissance r^2 en cliquant sur le point M puis sur le cercle.

Les élèves ont beaucoup joué avec cet outil et testé différentes positions du point M , constatant en premier que les points O, M et M' étaient alignés. Puis, lorsque le point M s'éloigne, le point M' se rapproche du centre d'inversion O et, réciproquement, lorsque le point M vient à proximité de O , le point M' s'écarte semble-t-il infiniment du point O . Enfin, lorsque M appartient au cercle d'inversion, $M' = M$ (fig. 22)

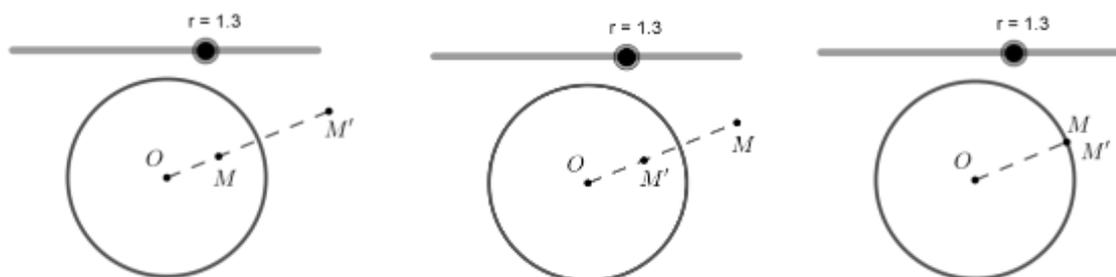


Figure 22

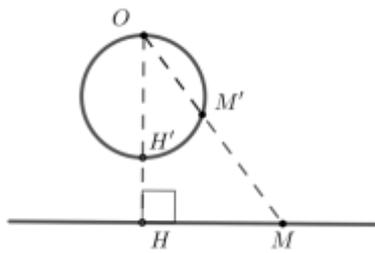
En faisant calculer au logiciel le produit $OM \times OM'$, quelque soit la position du point M , ils sont surpris d'obtenir une constante : r^2 (le carré du rayon).

La définition de l'inversion est alors énoncée dans le cas où $k > 0$: *étant donné un point fixe O et un nombre positif k , on appelle inversion la transformation qui, à un point M du plan associe le point M' appartenant à la demi-droite $[OM)$ tel que $OM \cdot OM' = k$. On la notera (O,k) .*

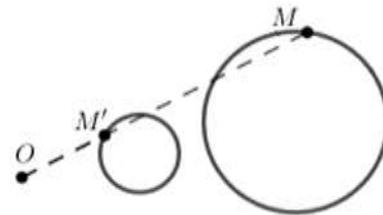
On peut tout de suite énumérer quelques propriétés évidentes :

- les points O, M et M' sont alignés ;
- si M' est l'image de M par une inversion alors M est l'image de M' par cette même inversion (ceci est dû à la symétrie de l'égalité $OM \cdot OM' = k$). On en déduit que l'inversion est involutive : la composée des inversions $(O,k) \circ (O,k) = Id$;
- le centre de l'inversion n'a pas d'image ;
- le cercle d'inversion de centre O et de rayon $r = \sqrt{k}$ est invariant point par point par l'inversion (O,k) .

Je laisse alors les élèves jouer avec quelques figures géométriques et découvrir quelques propriétés fondamentales de l'inversion (le cercle initial a été supprimé de l'affichage, le centre d'inversion étant O). Les démonstrations sont données en annexe.



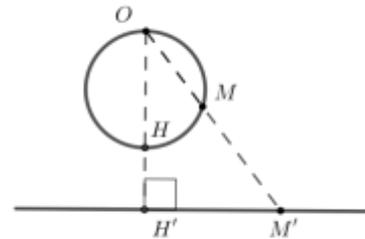
Une droite ne passant pas par le centre d'inversion O a pour image un cercle passant par O et dont le diamètre $[OH']$ est perpendiculaire à la droite



Un cercle ne passant pas par O a pour image un cercle, le point O étant un des centres d'homothétie des deux cercles



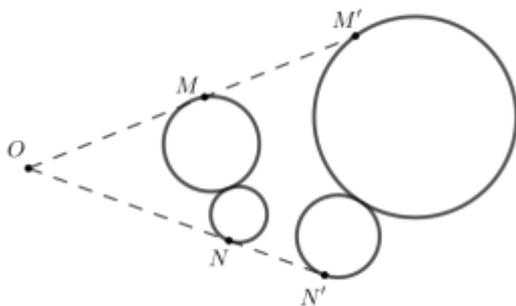
Une droite passant par O est globalement invariante



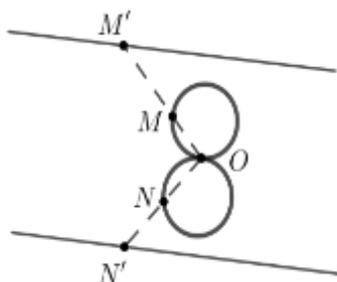
Réciproquement, un cercle passant par O a pour image une droite perpendiculaire au diamètre issu de ce centre

Inversion de deux cercles ou droites tangents ou parallèles

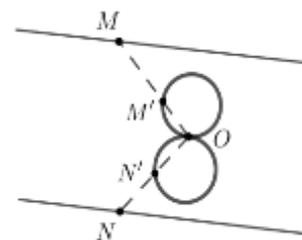
Ensuite, nous avons étudié les configurations de droites ou cercles tangents ou parallèles :



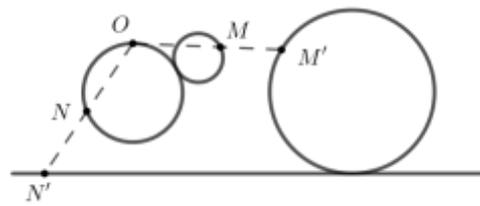
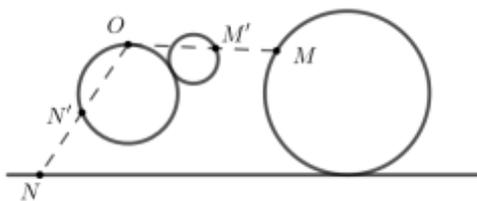
Deux cercles tangents ne passant pas par O ont pour image deux cercles tangents



Deux cercles tangents en O ont pour image deux droites parallèles et réciproquement



Réciproque : deux droites parallèles ont pour image deux cercles tangents en O .



Deux cercles tangents dont un passe par O ont pour image une droite et un cercle tangents

Réciproque : un cercle et une droite tangents ont pour image deux cercles tangents dont un passe par O

Inversion et trois cercles tangents

Nous avons ici utilisé le résultat concernant la transformation de deux cercles tangents en O par l'inversion de centre O et pour lesquels nous obtenons deux droites parallèles.

Il suffit de construire deux droites parallèles et un cercle tangent à ces deux droites (fig. 23), puis en réalisant l'inversion par rapport à un point O n'appartenant pas aux droites, nous obtenons trois cercles tangents, trois cas de figure selon la position du cercle par rapport au centre O, la figure du milieu représentant le cas limite entre le cercle tangent intérieurement et extérieurement.

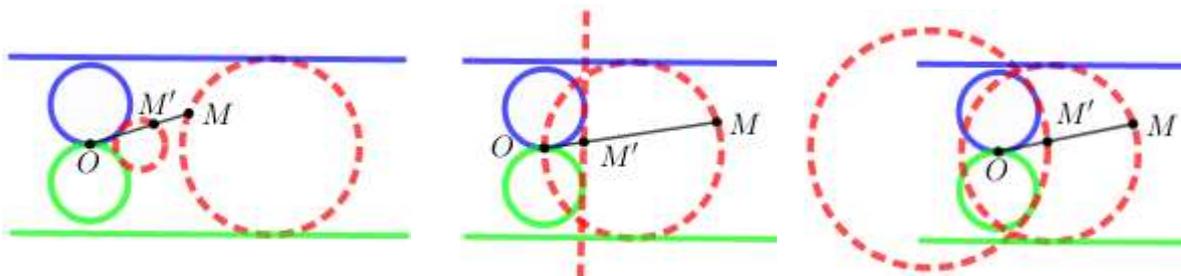


Figure 23

Inversion et quatre cercles tangents, configuration de Descartes

Nous voici à nouveau revenus à la configuration de Descartes vue précédemment. Nous allons pouvoir prouver que si trois cercles sont tangents deux à deux, il n'existe au plus que deux cercles tangents aux trois autres : l'un intérieurement et l'autre extérieurement.

En réalisant l'inversion des trois cercles tangents par rapport à un des points d'intersection O (fig. 24), nous obtenons la figure de droite : un cercle tangent à deux droites parallèles.

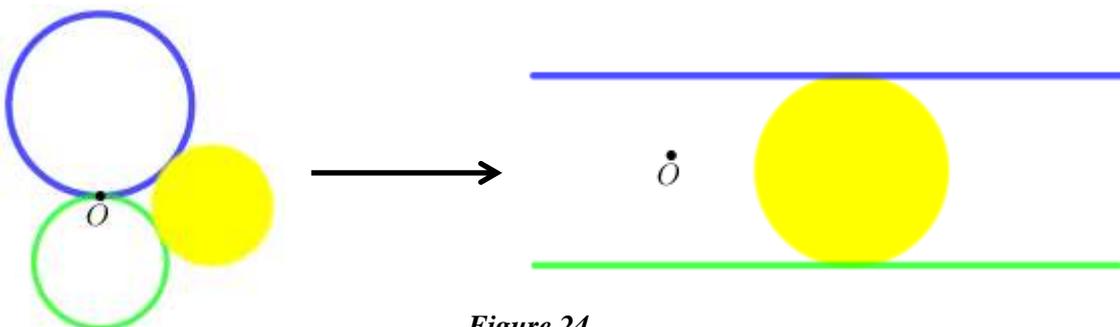


Figure 24

Cette figure inversée nous permet de prouver qu'il n'y a que deux cercles tangents aux trois puisque nous pouvons ajouter un cercle à droite (fig. 25) ou à gauche (fig. 26).

1^{er} cas : un cercle rouge tangent à droite

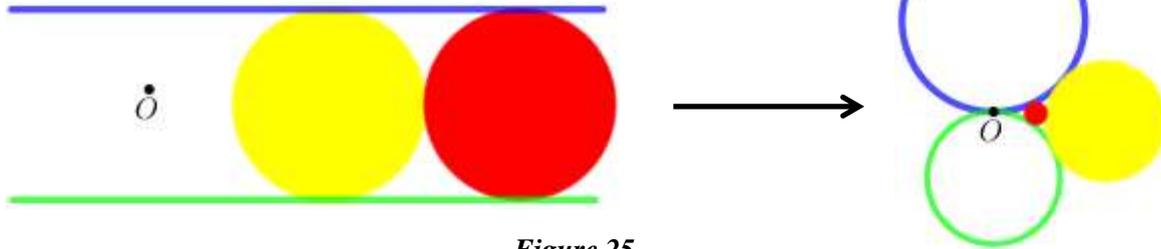


Figure 25

2^{ième} cas : un cercle rouge tangent à gauche

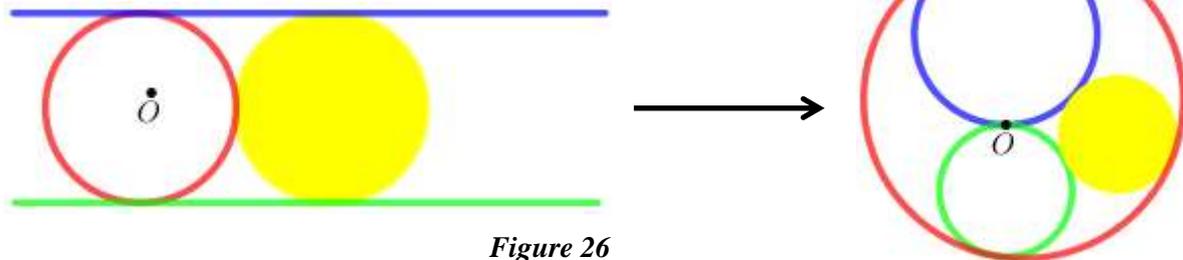


Figure 26

Nous obtenons ainsi une configuration de Descartes de quatre cercles tangents pour laquelle chacun des cercles est tangent aux trois autres.

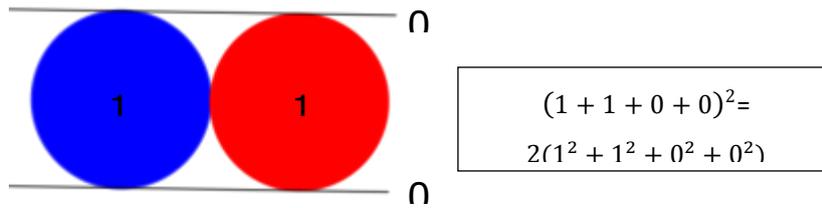
La formule de Descartes

Une courte remarque concernant les courbures a, b, c, d des quatre cercles tangents de la configuration de Descartes. Elles vérifient la formule de Descartes :

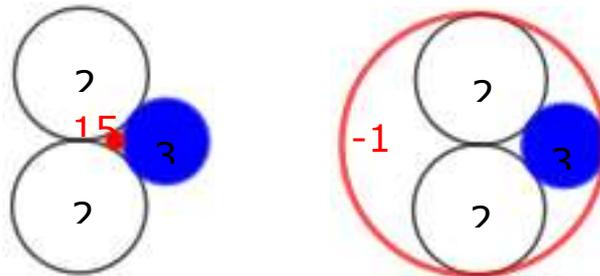
$(a + b + c + d)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$ lorsque les cercles sont tangents extérieurement,

$(-a + b + c + d)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$ lorsque les cercles de courbures b, c et d sont tangents intérieurement au cercle de courbure a .

Voici un premier exemple



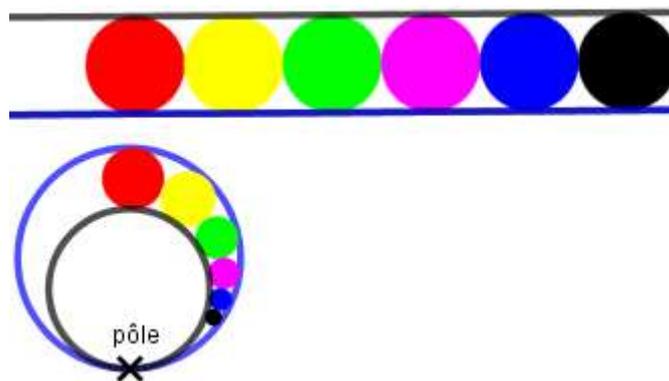
Un second exemple : connaissant les courbures 2, 2, et 3 de trois cercles tangents, déterminons la courbure des deux cercles qui leur sont tangents. La courbure x d'un cercle tangent aux trois cercles donnés vérifie l'équation $(2 + 2 + 3 + x)^2 = 2(2^2 + 2^2 + 3^2 + x^2)$ soit $(x + 7)^2 = 2(17 + x^2)$ qui a pour solutions 15 et -1.



Cette formule de Descartes permet ainsi de résoudre le problème CCC des trois cercles tangents sans utiliser l'hyperbole ou encore l'inversion comme nous l'avons fait.

La chaîne de Pappus

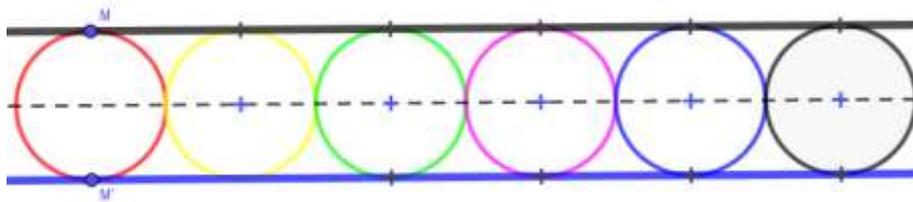
En jouant avec l'inversion, les élèves ont trouvé la figure ci-dessous intéressante pour un crop circle



La construction de la chaîne de Pappus à la règle et au compas

L'utilisation du logiciel est très intéressante mais la construction de la chaîne de Pappus à la règle et au compas a tout de même un côté très jubilatoire aussi par son côté « cognition incarnée ».

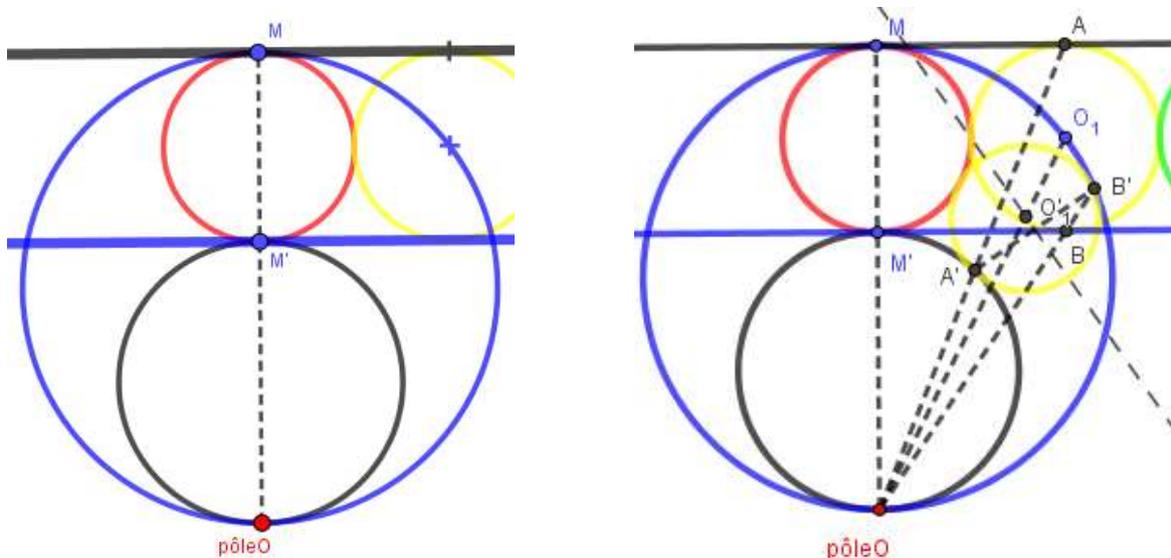
On commence par construire tous les cercles tangents entre eux et à deux droites parallèles.



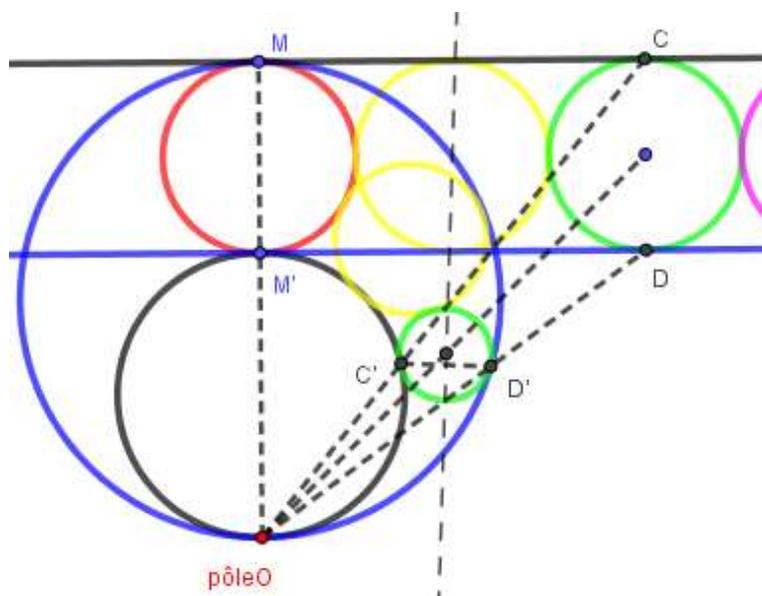
Puis on place le pôle O d'inversion sur la droite (MM') . Considérons l'inversion de pôle O laissant le cercle rouge globalement invariant qui transforme M en M' .

Elle transforme la droite noire en le cercle noir de diamètre $[OM']$ et la droite bleue en le cercle bleu de diamètre $[OM]$ tous les deux faciles à construire au compas.

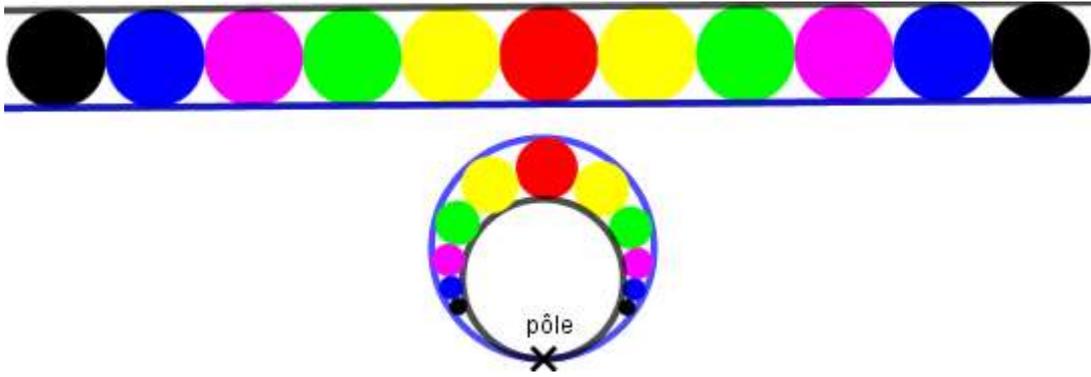
Déterminons l'image du cercle jaune : on trace la droite (OA) qui coupe le cercle noir en A' l'image de A , on obtient de même l'image B' de B en prolongeant la droite (OB) qui coupe le cercle bleu. On sait que le centre du cercle image est situé sur la droite (OO') . Ce centre O'_1 est l'intersection de la médiatrice de $[A'B']$ avec cette droite (OO') . Mais attention, O'_1 n'est pas l'image de O_1 par l'inversion.



Il suffit alors de réaliser la même construction avec les autres cercles.



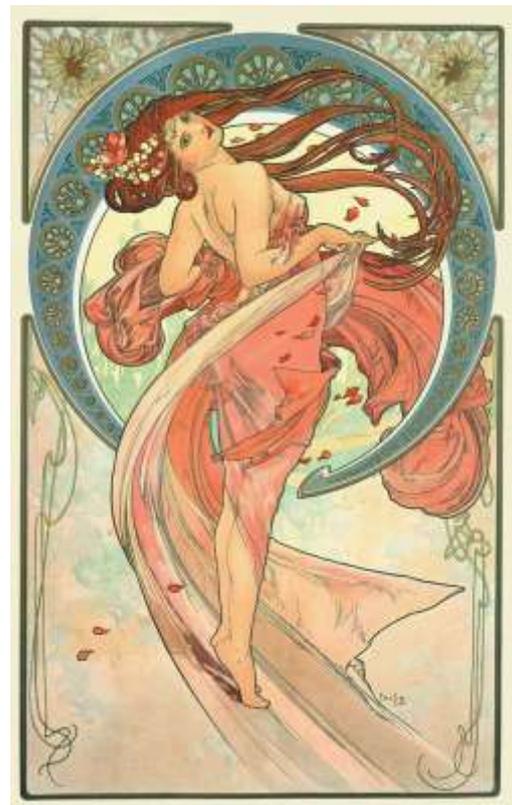
Une telle suite de cercles tangents est appelée chaîne de Pappus.



En regardant ces figures, on imagine le tableau de Robert Delaunay ci-dessous à gauche auquel on ferait subir une inversion afin d'obtenir les cercles de l'affiche d'Alphonse Mucha à droite.

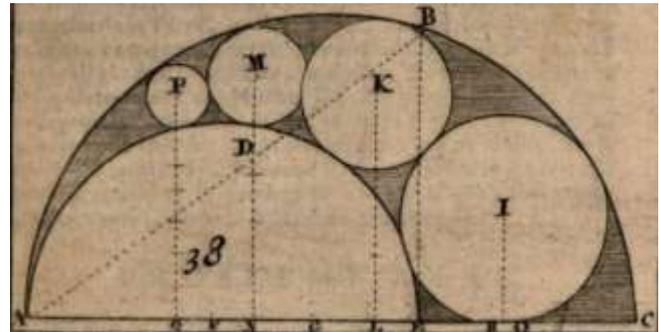
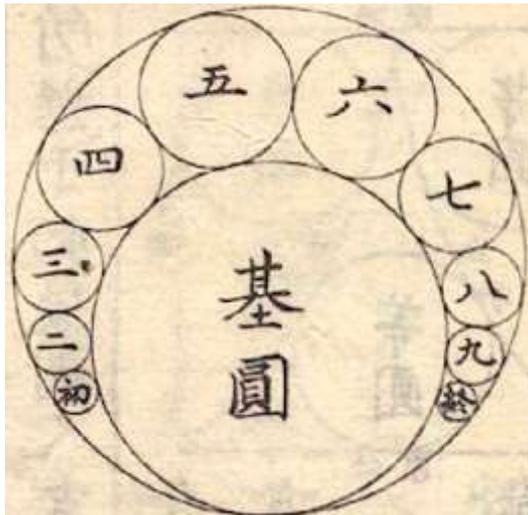


Robert Delaunay, Rythmes, 1934



Alphonse Mucha, La Danse 1898

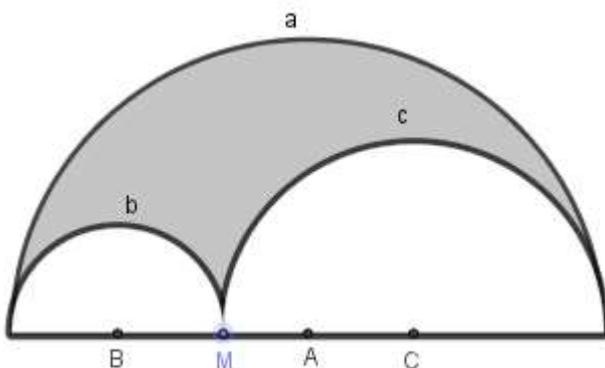
Par la suite, nous nous sommes rendu compte que nous avons finalement redécouvert des constructions connues dans l'histoire de la géométrie dont voici quelques extraits.



Ou encore plus ancien : concernant les cercles tangents, une étude importante est celle d'Archimède (287-212 av. J.C.) sur l'Arbelos, nom donné à une configuration géométrique modélisant un outil du même nom qui signifie couteau ou tranchet et utilisé par les cordonniers.



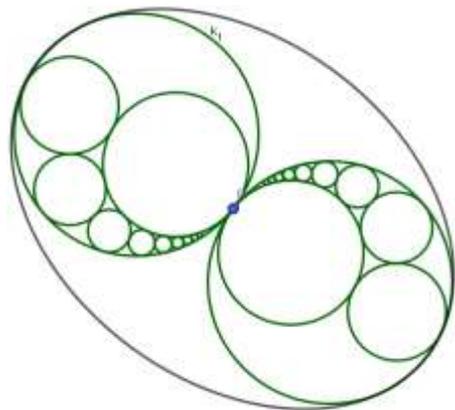
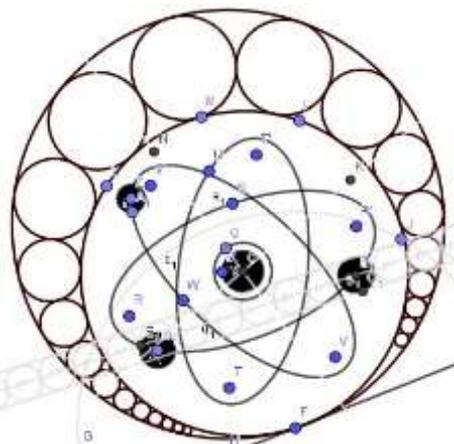
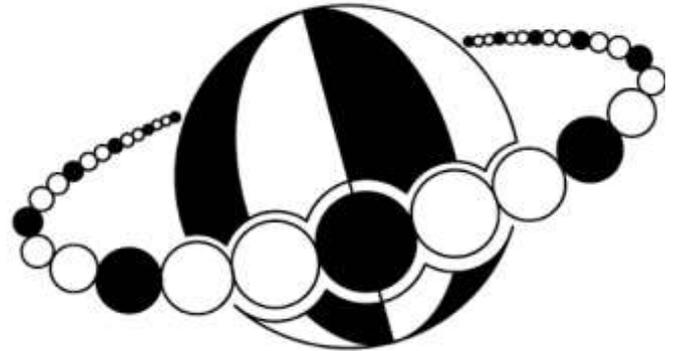
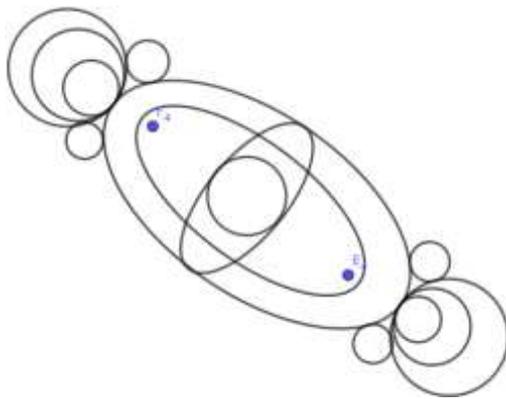
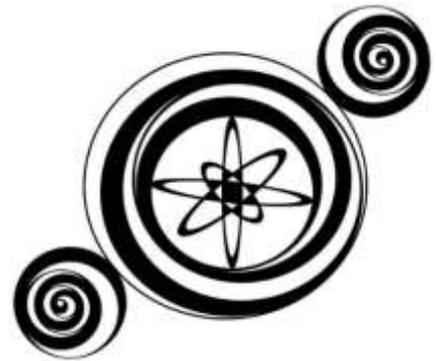
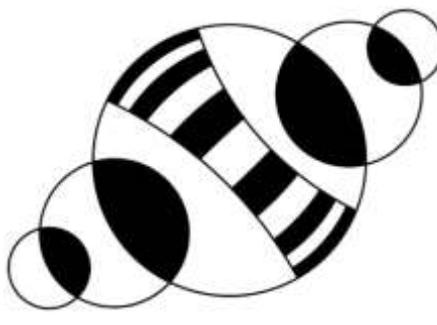
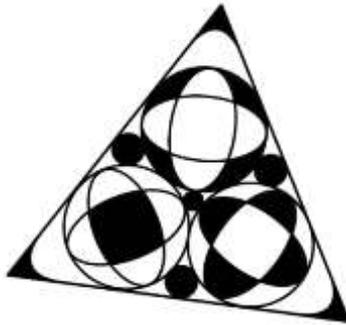
La modélisation d'Archimède est la suivante : soit un demi-cercle de centre A, un point M appartenant à son diamètre et deux cercles de centre B et C tangents l'un l'autre en M mais également tangents au grand demi-cercle de centre A.

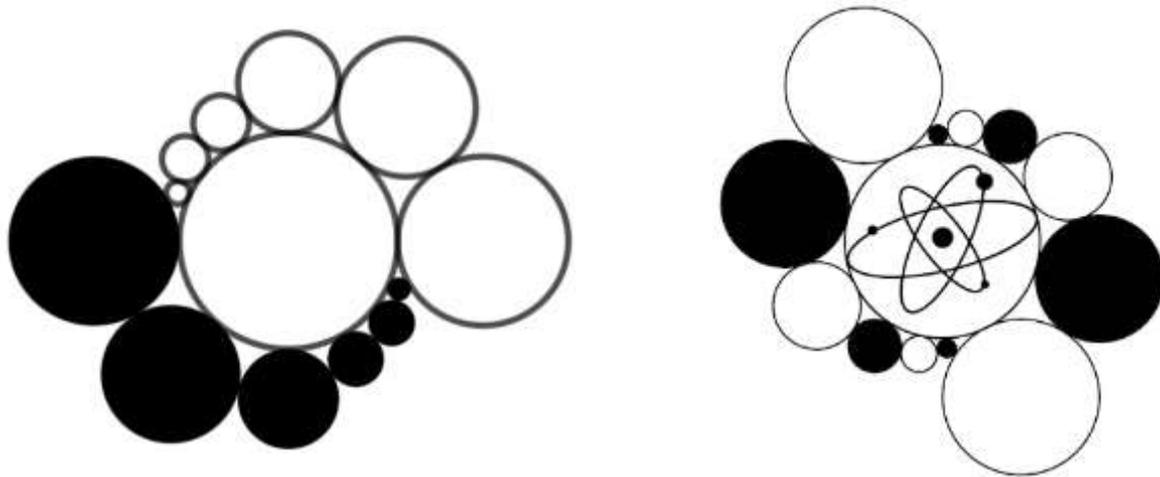


On pourra lire l'article « l'Arbelos » de Hamza Khelif [8] ou encore l'article très complet de Baptiste Gorin intitulé « Une étude de l'Arbelos » [7].

Quelques figures construites par les élèves

[Retour au sommaire](#)



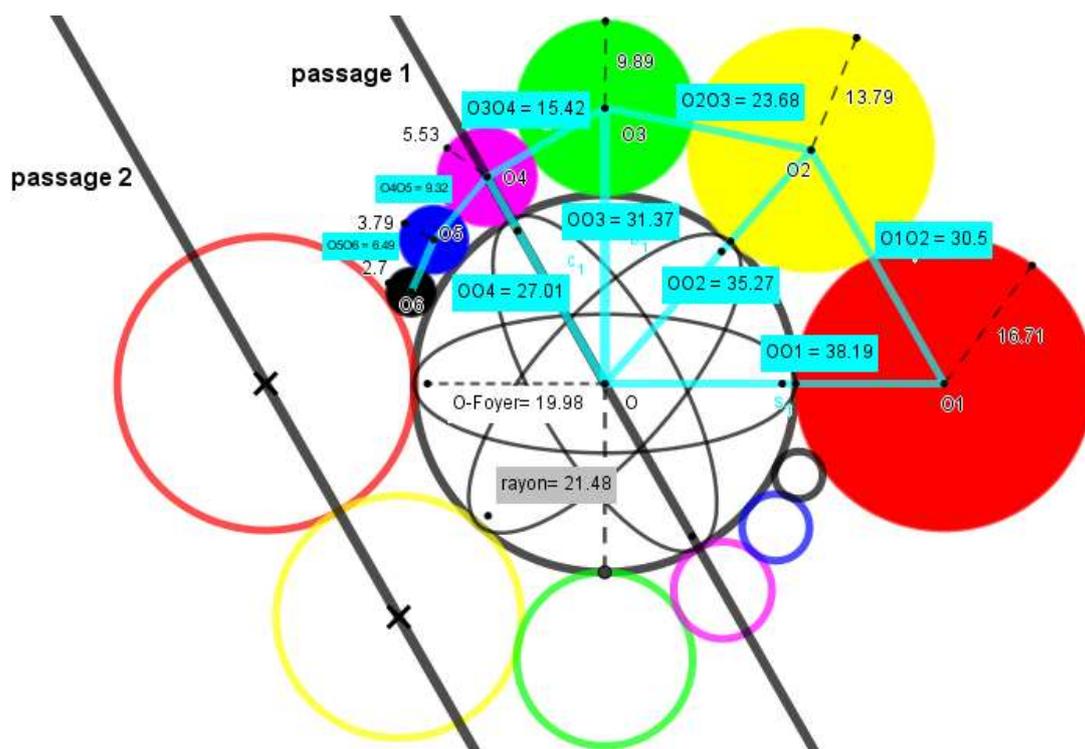


Le choix des élèves

Un mois avant le jour J, il nous a fallu faire un choix et il nous restait seulement trois séances. N’ayant jamais réalisé de crop circle, nous avons choisi la figure qui nous paraissait la plus simple à réaliser sur le terrain.

Voici ci-dessous le plan de la figure prévue : les cercles de même couleur sont symétriques par rapport au centre *O* du cercle central. L’un sera « plein » (c’est-à-dire toutes les tiges de blé situées à l’intérieur écrasées) et son symétrique sera « vide » (n’aura que sa périphérie aplatie).

Afin de ne pas laisser de traces de construction, le grand cercle placé au milieu de la figure devra avoir son centre situé sur la ligne droite - appelée passage 1 - qui représente un passage de traitement du tracteur dans le champ. De même, les centres des deux cercles « vides » rouges et jaunes seront placés sur le passage 2 de traitement. Cette contrainte a engendré une modification d’urgence de la figure qui ne sera pas tout à fait une chaîne de Pappus.



Les préparatifs

Sur les conseils du Youtuber Astronogeek, nous achetons onze frontales de couleur rouge et préparons quatre planches d'un mètre ainsi que des ficelles dont les longueurs sont égales aux rayons des cercles mais aussi égales aux distances entre centres des cercles afin de trianguler. Nous décidons de faire un test grandeur nature dans un parc de la ville de Verdun à l'aide d'une tondeuse. Un premier cercle est créé puis un deuxième mais malheureusement, les ficelles n'étant pas suffisamment tendues, les erreurs sont flagrantes et décidons de terminer la matinée par un barbecue... Nous avons une pensée amusée pour le service de la mairie qui a certainement découvert des cercles tondus dans le parc qu'ils entretiennent régulièrement.

La nuit du 28 au 29 juin

Arrive enfin le soir du 28 juin, la météo est très orageuse et certains désirent renoncer tellement les éclairs tombent de toute part. Mais comment décaler ? L'équipe de tournage est sur place et certains élèves passent leur oral de français quelques jours plus tard. Je parviens à convaincre toute l'équipe de prendre le risque d'affronter les intempéries. Mais nous ne pouvons pas commencer à l'heure prévue et décidons de ne construire que les cercles « pleins » ainsi que les ellipses. Afin d'être le plus discret possible, j'achemine au champ les élèves assis dans une benne agricole.

Étape 1 : construction du cercle central de centre O : un élève se positionne sur le centre O et tient l'extrémité d'une ficelle de longueur 21,48 m. Un second élève se situe à l'autre extrémité et, muni d'une planche, il écrase la périphérie du grand cercle.

Étape 2 : construction du cercle rouge de centre O_1 : une ficelle de longueur OO_1 centrée en O permet de repérer le point O_1 , ce qui permet d'aplatir la périphérie du cercle rouge à l'aide d'une ficelle dont la longueur correspond à son rayon.

Étape 3 : construction du cercle jaune de centre O_2 : le repérage de O_2 s'effectue par triangulation à l'aide de deux ficelles de longueur OO_2 et O_1O_2 . Puis le cercle jaune est aplati.

Ainsi de suite jusqu'au cercle noir.

Malheureusement, le jour commence à se lever vers 5h00 ce 29 juin et nous ne pouvons créer les ellipses.

Conclusion

Le projet de cette année fut extrêmement riche.

Avant tout sur le plan mathématique puisque les élèves ont découvert la composée d'homothéties, la construction de l'hyperbole et de l'ellipse à l'aide des foyers ainsi que l'utilisation de l'inversion. Ils ont aussi appris à utiliser un logiciel de géométrie dynamique. Ce qu'ils ont également appris à travers ces activités c'est le côté jubilatoire de la géométrie ainsi que son intarissable variété de formes.

De plus, ce fut une expérience humaine faite de rencontres mémorables : celle d'un youtuber célèbre d'abord et celles de personnes extraordinairement crédules ensuite. Ce fut également pour les élèves une immense surprise de découvrir que leur prof de maths ne savait pas que

tourner en rond dans sa classe ou réaliser des « ronds » au tableau mais qu'il pouvait aussi tourner en rond dans ses propres champs.

Enfin, le fait d'avoir réalisé de nuit cette fameuse chaîne de Pappus grandeur nature laissera un souvenir gravé à jamais dans l'esprit de tous les acteurs de cette fabuleuse expérience. En effet, tracer des cercles sur une feuille ou un ordinateur c'est bien mais dans un champ c'est mieux ! Tout comme la réalisation d'une incroyable fakenews pour laquelle les nombreux commentaires furent une expérience anthropologique très enrichissante. La cerise sur le gâteau : le demi-million de vues de notre vidéo.

Remerciements

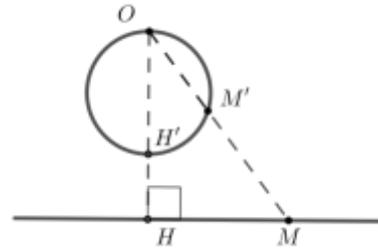
Tous mes remerciements à Julien Didry et Lorraine Caillas du Pays de Verdun pour la coordination de toute l'équipe à l'origine de cette formidable aventure, à Lorraine Vidéos pour la réalisation de la vidéo « la vérité sur le crop circle de Meuse », à Skyviews pour les images réalisées à l'aide d'un drone, à Philippe Lombard le chercheur de l'atelier qui m'a fait pleinement confiance et m'a laissé libre à la fois pour le thème choisi et pour le déroulement de l'atelier, et surtout félicitations aux élèves pour leur travail ainsi que leur capacité à garder un secret toute une année !

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Audibert, Pierre, *cercles d'Apollonius et Descartes*, sur le site pierreaudibert.fr
- [2] Anne Boyé, *L'Apollonius Gallus et le Problème des trois cercles, comme défense et illustration de la géométrie synthétique : Thèse de Doctorat*, Université de Nantes - Centre François Viète, 1998
- [3] Claisse, Emmanuel, *La construction d'Apollonius au service du repérage par le son pendant la Première Guerre Mondiale, 2021*, repères-IREM n°124, Editions Topiques, Nancy, 2021.
- [4] Claisse Emmanuel, [le repérage par le son](#) (vidéo),
- [5] Claisse Emmanuel, *le mouvement au service de la perspective. Comparaison entre manipulation physique et virtuelle*, repères-IREM n°119, Editions Topiques, Nancy, 2020.
- [6] Drissi, Fathi, *un crop circle en Meuse*, le Petit Vert n°127 sur le site de l'APMEP.
- [7] Gorin, Baptiste, *une étude de l'arbelos*, site [docplayer](http://docplayer.fr)
- [8] Khelif, Hamza, *l'arbelos, partie 1*, site images.cnrs.fr
- [9] Pappus et Paul Van-Eyke, *La Collection mathématique*, t. tome 1, 1932
- [10] Viète François (1600), Apollonius Gallus

ANNEXE : quelques démonstrations

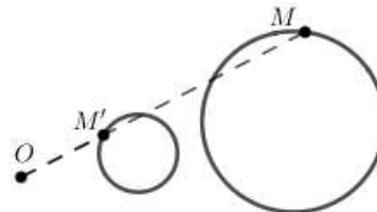
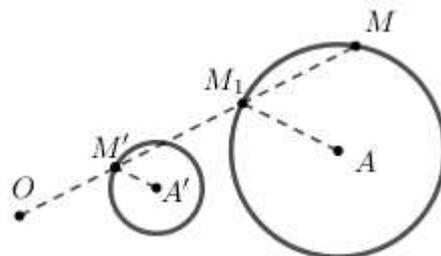
Une droite ne passant pas par le centre d'inversion O a pour image un cercle passant par O et dont le diamètre $[OH']$ est perpendiculaire à la droite



Démonstration : soit H le projeté orthogonal de O sur la droite donnée d et H' son image par l'inversion de centre O et de rapport k . Soit M un point variable de la droite d et M' son image. Alors $OM \times OM' = OH \times OH' = k$: cette relation prouve que les quatre points M, M', H et H' appartiennent à un même cercle donc les angles $(M'H', M'M) = (HH', HM) = 90^\circ$ c'est-à-dire $(M'H', M'O) = 90^\circ$. Le lieu du point M' est donc le cercle de diamètre $[OH']$.

La transformation étant réciproque, l'inverse du cercle de diamètre $[OH]$ est la droite perpendiculaire à (OH) passant par H' l'image de H .

Un cercle ne passant pas par O a pour image un cercle, le point O étant un des centres d'homothétie des deux cercles

**Démonstration**

Soit un point O et M un point d'un cercle de centre A . Notons M' l'image de M par l'inversion de centre O et de rapport $k > 0$: $OM \times OM' = k$

Désignons par M_1 l'intersection de (OM) avec le cercle de centre A . Notons p la puissance du point O par rapport à ce cercle : $OM \times OM_1 = p$. On en déduit que $\frac{OM'}{OM_1} = \frac{OM \times OM'}{OM \times OM_1} = \frac{k}{p}$ c'est-à-dire que $OM' = \frac{k}{p} \times OM_1$ ce qui prouve que M' est l'image de M_1 par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{k}{p}$. Ainsi, l'image du cercle de centre A par l'inversion de centre O est un cercle dont le point O est un des centres d'homothétie.