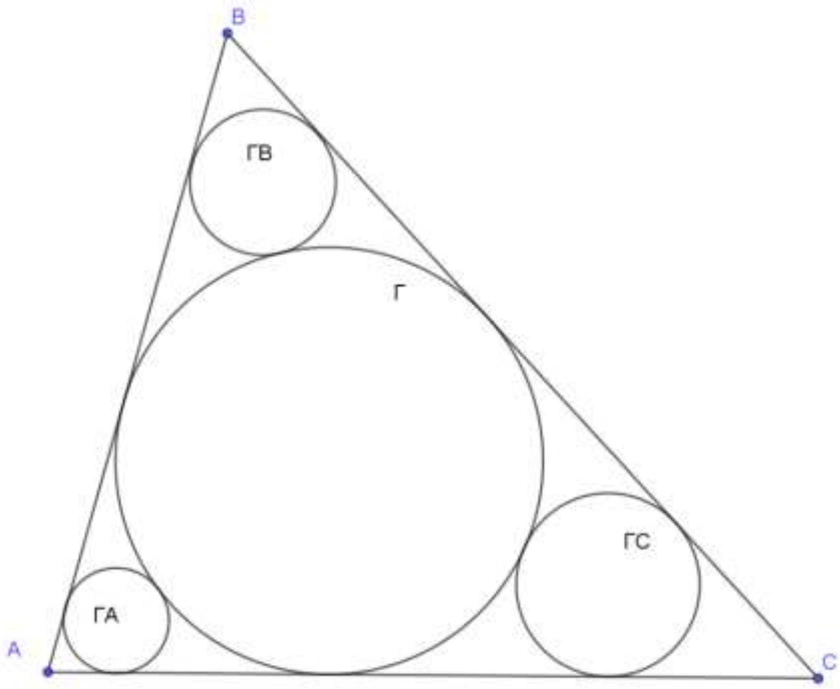
LE PROBLÈME DU TRIMESTRE N°148

Proposé par Fabien Lombard

On considère un triangle ABC et son cercle inscrit Γ de rayon r. Les cercles Γ_A, Γ_B et Γ_C, de rayons respectifs r_A, r_B et r_C sont tangents à Γ et à des côtés du triangle ABC.
Justifiez que la construction ci-dessous est possible et exprime r r en fonction de r_A, r_B et r_C.



On pourra, par exemple, effectuer un calcul direct ou encore exprimer tan $\left(\frac{\pi-\hat{A}}{4}\right)$ en fonction des rayons r et r_A.

SOLUTION DU PROBLÈME N°147

Soient x, y, z trois nombres strictement positifs tels que $x+y+z=1$.
Proposer au moins deux méthodes de résolution de l'équation (E) : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=9$

Solution

Cinq méthodes sont proposées, trois algébriques, une analytique et la dernière géométrique.

Méthode 1 (proposée par Fabien Lombard)

On note $P=(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$. On a donc par développement,

$$P=3+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)$$

Or la somme d'un nombre strictement positif X et de son inverse est toujours supérieur ou égal à 2. En effet $X+\frac{1}{X}-2=\frac{X^2-2X+1}{X}=\frac{(X-1)^2}{X}\geq 0$; on remarque également que $X+\frac{1}{X}=2$ si et seulement si $X=1$

Retour au sommaire

Par conséquent $P = 3 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z}\right) \geq 3 + 2 + 2 = 2 = 9$, et il y a égalité si et seulement si chacune des parenthèses est égale à 2, soit lorsque $\frac{x}{y} = \frac{x}{z} = \frac{z}{y}$ ou encore $x = y = z$.

De $x + y + z = 1$, on déduit que l'équation (E) a pour unique solution le triplet $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Fabien Lombard généralise ce résultat avec n nombres positifs $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$, le produit $P = (a_1, +a_2 + \dots a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots \frac{1}{a_n}\right)$ est supérieur ou égal à n^2 avec égalité si et seulement si $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$

En effet $P = n + \sum_{i \neq j}\left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}\right)$; il y a $\binom{n}{2}$ termes de la forme $\left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}\right)$ qui sont chacun supérieurs à 2, donc $P \geq n + \binom{n}{2} \times 2$, soit après calcul $P \geq n^2$.

F Lombard fait remarquer que l'on peut arriver au même résultat en considérant l'inégalité de convexité appliquée à la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$, qui permet d'écrire que

$$\frac{1}{\sum_1^n \frac{a_i}{n}} \leq \frac{\sum_1^n \frac{1}{a_i}}{n} \text{ , ce qui donne } \left(\sum_1^n a_i\right)\left(\sum_1^n \frac{1}{a_i}\right) \geq n^2$$

Méthode 1bis (proposée par Jacques Choné)

Jacques Choné s'appuie sur un résultat analogue, l'énonçant sous la forme : la moyenne harmonique d'une liste de nombres strictement positifs est toujours inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique avec égalité si et seulement si tous les nombres de la liste sont égaux.
Dans le cas présents les hypothèses se traduisent par

$$\frac{x+y+z}{3} = \frac{1}{3} \text{ et } \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Il y donc égalité des moyennes harmoniques et arithmétiques. Les nombres sont donc tous égaux à $\frac{1}{3}$.

Méthode 2 (proposée par Fabien Lombard)

On isole $z = 1 - (x + y)$. On a alors $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{1-(x+y)} = 9$

En notant $s = x + y$ et $p = xy$, on obtient $\frac{s}{p} + \frac{1}{1-s} = 9$, soit $s^2 - s - p(9s - 8) = 0$.

0n peut remarquer que $9s - 8 < 0$. En effet $\frac{1}{z} < 9$ donc $z > \frac{1}{9}$, ce qui a pour conséquence que

$$s < 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} .$$

On a donc $9s - 8 \neq 0$ et par conséquent $p = \frac{s^2-s}{9s-8}$.

On en déduit que x et y sont solutions de l'équation $U^2 - sU + \frac{s^2-s}{9s-8} = 0$ (E')

Cette équation a pour discriminant $\Delta = s^2 - 4\frac{s^2-s}{9s-8}$, soit $\Delta = \frac{s(3s-2)^2}{9s-8}$.

Avec $s > 0$ et $9s - 8 < 0$, cette équation (E') n'aura donc des solutions que si $3s - 2 = 0$.

Par conséquent on en déduit que $s = x + y = \frac{2}{3}$ puis que $p = xy = \frac{1}{9}$. L'équation (E'), nous donne les solutions $x = y = \frac{1}{3}$ dont on déduit $z = \frac{1}{3}$.

Retour au sommaire

Méthode 3 (proposée par Philippe Févotte)

L'équation (E) s'écrit également $xy + yz + xz = 9\,q$, en notant $q = xyz$.
Les nombres $x,\ y,\ z$ sont les solutions de l'équation du troisième degré $P(X) = 0$ avec

$$P(X) = (X - x)(X - y)(X - z).$$

Or $P(X) = X^3 - (x + y + z)X^2 + (xy + yz + xz)X - xyz$
On a donc $P(X) = X^3 - X^2 + 9qX - q$, il reste à résoudre l'équation $X^3 - X^2 + 9qX - q = 0$ pour déterminer les nombres $x,\ y$ et z.
Soit $Z = X - \frac{1}{3}$, l'équation (E) équivaut à l'équation (E')

$\left(Z + \frac{1}{3}\right)^3 - \left(Z + \frac{1}{3}\right)^2 + 9q\left(Z + \frac{1}{3}\right) - q = 0$, c'est-à-dire $Z^3 + 9\left(q - \frac{1}{27}\right)Z + 2\left(q - \frac{1}{27}\right) = 0$

La résolution de cette équation par la méthode de Cardan nous invite à calculer

$$\Delta = (q - \tfrac{1}{27})^2 + 27\left(q - \frac{1}{27}\right)^3 = 27q(q - \tfrac{1}{27})^2$$

L'équation (E') aura trois solutions réelles ou confondues si $\Delta = 27q(q - \frac{1}{27})^2 \leq 0$
Or les trois solutions $x,\ y$ et z, si elles existent, sont strictement positives. Par conséquent $q > 0$ et donc $(q - \frac{1}{27})^2 \leq 0$. On a donc $q = \frac{1}{27}$ et l'équation (E') se réduit à $Z^3 = 0$ et elle a 0 pour solution triple.
Par conséquent l'équation (E) a pour unique solution $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Méthode 4 (proposée par Jacques Choné)

Remarquons tout d'abord que $x = y = z = \frac{1}{3}$ est une solution particulière du système.
L'équation (E) s'écrit également $xy + yz + xz = 9\,q$, en notant $q = xyz$.
On a également $x + y + z = 1$. Les nombres $x,\ y,\ z$ sont donc les solutions de l'équation $X^3 - X^2 + 9qX - q = 0$. L'étude de la fonction f_q définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_q(X) = X^3 - X^2 + 9qX - q$ montre que :

- si $q > \frac{1}{27}$

f_q est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ en prenant des valeurs de $-q$ à $+\infty$. Elle a donc une racine unique, de plus simple, car $f_q{}'$ ne s'annule par pour cette racine.

- si $0 < q < \frac{1}{27}$

En notant $\alpha = \sqrt{1 - 27q}$, la fonction f_q est croissante sur $\left[0, \frac{1-\alpha}{3}\right]$, décroissante sur $\left[\frac{1-\alpha}{3}, \frac{1+\alpha}{3}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{1+\alpha}{3}, +\infty\right[$.
Sachant que $f_q\left(\frac{1-\alpha}{3}\right) = -\frac{2}{27}(1 - \alpha) < 0$, on en déduit que, là également f_q, a une racine unique, de plus simple, car $f_q{}'$ ne s'annule par pour cette racine.

- si $q = \frac{1}{27}$, $X^3 - X^2 + 9\frac{1}{27}X - \frac{1}{27} = \frac{1}{27}(3X - 1)^3$

Par conséquent $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ est l'unique solution du système.

Retour au sommaire

Méthode 5 (proposée par Philippe Févotte)

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et on considère les deux vecteurs $u = \left(\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}\right)$ et $v = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{\sqrt{y}}, \frac{1}{\sqrt{z}}\right)$.
L'inégalité de Cauchy-Schwartz donne :

$$\left(\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{\sqrt{y}}, \frac{1}{\sqrt{z}}\right) \leq (x+y+z)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Soit $3 \leq \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}}$ ou encore $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \quad \geq 9$

De plus on sait qu'il y a égalité si et seulement s'il existe un réel k tel que $u = kv$, ce qui donne $\left(\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}\right) = k\left(\frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{\sqrt{y}}, \frac{1}{\sqrt{z}}\right)$ et par conséquent $x = y = z = k$

De $x + y + z = 1$, on déduit que la solution est $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Remarque : cette méthode permet de généraliser le problème à n nombres $x_1, x_2 \dots . x_n$ tels que $x_1 + \ x_2 \dots + x_n = 1$ et $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \dots . + \frac{1}{x_n} = n^2$

Retour au sommaire