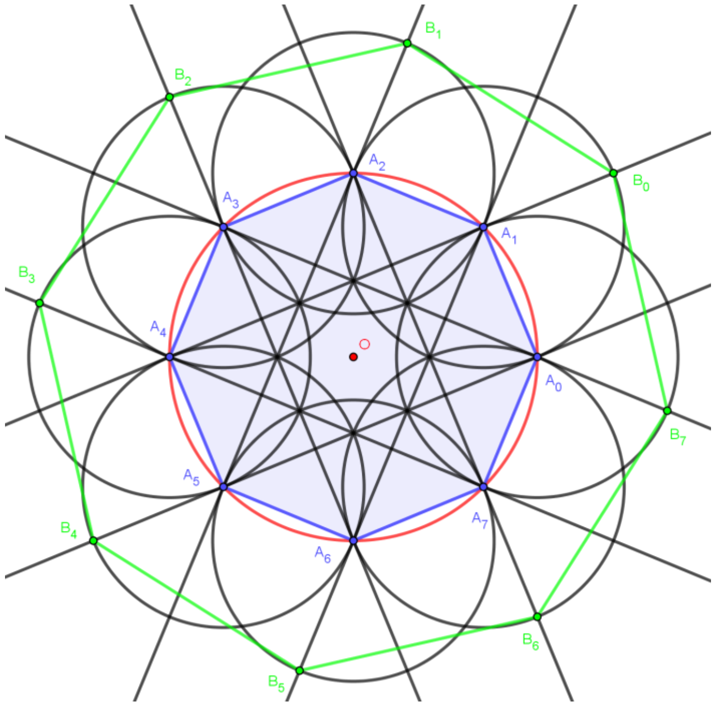
SOLUTIONS DÉFI POUR NOS COLLÈGUES N°146 « OCTOGONES »

La triplication de l'octogone régulier

Étant donné un octogone régulier, comment construire un octogone régulier d'aire triple ?
La figure ci-contre donne une méthode de construction de la "triplication" d'un octogone régulier à la règle et au compas.

La justification de cette construction avait été proposée comme défi dans le Petit Vert n°146. **Fabrice Laurent** nous en propose une que vous trouverez à la fin de cet article.

Dans ce qui suit, nous allons vous présenter d'autres démarches utilisant, pour la première, des notions enseignées au niveau collège et pour les deux dernières, les nombres complexes.



1ère démarche

On note *a* la longueur du côté de l'octogone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$.
La couronne délimitée par les deux octogones est constituée de huit quadrilatères identiques à $A_1A_2B_1B_0$.
Ce quadrilatère est lui-même constitué des triangles $A_1A_2B_1$ et $A_1B_1B_0$ rectangles respectivement en A_2 et en A_1.
En effet, par construction, $A_1A_2B_1$ est rectangle et isocèle en A_2. Il en résulte que $\widehat{A_2A_1B_1} = 45°$
Par ailleurs, comme $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ est un octogone régulier, on peut aisément établir que $\widehat{A_2A_1A_4} = 45°$.
On peut donc en déduire que $\widehat{B_0A_1B_1} = 90°$.

L'application du théorème de Pythagore dans le triangle $A_1A_2B_1$ rectangle et isocèle en A_2, puis dans le triangle $A_1B_1B_0$ rectangle en A_1, permet d'obtenir : $A_1B_1 = a\sqrt{2}$ et $B_0B_1 = a\sqrt{3}$.

D'autre part, sachant que la somme des angles du quadrilatère non croisé $A_1A_2B_1B_0$ vaut 360°, que $\widehat{A_1A_2B_1} = 90°$ et que $\widehat{A_2A_1B_0} = 135°$, on a $\widehat{A_2B_1B_0} + \widehat{A_1B_0B_1} = 135°$.
Et puisque les quadrilatères $A_1A_2B_1B_0$ et $A_2A_3B_2B_1$ sont superposables, les angles $\widehat{A_1B_0B_1}$ et $\widehat{A_2B_1B_2}$ ont la même mesure.
Ainsi, $\widehat{B_2B_1B_0} = \widehat{A_2B_1B_0} + \widehat{A_2B_1B_2} = 135°$.

Retour au sommaire

En appliquant ce raisonnement aux sept autres quadrilatères constituant la couronne définie plus haut, on peut conclure que les angles internes de l'octogone $B_0B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$ mesurent 135° et que ses côtés ont la même longueur valant $a\sqrt{3}$.
Il en découle que $B_0B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$ est bien un octogone régulier et un agrandissement de $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ dans le rapport $\sqrt{3}$.

Pour les deux démarches suivantes, on se place dans le plan complexe et on se ramène au cas où $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ est un octogone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique de sorte que les affixes de ses sommets soient les racines huitièmes de l'unité.
Ainsi, pour tout entier $k \in [\![0\,;7]\!]$, le point A_k a pour affixe $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{8}} = e^{i\frac{k\pi}{4}}$.
Enfin, on note ω_k l'affixe des points B_k sommets de l'octogone $B_0B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$ pour $k \in [\![0\,;7]\!]$.

2ème démarche

Par construction, B_k est l'image de A_k par la rotation de centre A_{k+1} et d'angle $\frac{\pi}{2}$ pour tout $k \in [\![0\,;6]\!]$ et B_7 l'image de A_7 par la rotation de centre A_0 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
D'où :
$\forall\, k \in [\![0\,;6]\!], \omega_k = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_k - z_{k+1}) + z_{k+1}\ et\ \omega_7 = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_7 - z_0) + z_0$

Or, $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ est un octogone régulier, donc pour tout entier $k \in [\![0\,;6]\!]$, le point A_{k+1} est l'image de A_k par la rotation de centre O (point d'affixe 0) et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et A_0 est l'image de A_7 par cette même rotation.
Il s'en suit que :
$\forall\, k \in [\![0\,;6]\!], z_{k+1} = e^{i\frac{\pi}{4}}z_k\ et\ z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}z_7$

Il en résulte que :
$\forall\, k \in [\![0\,;6]\!], \omega_k = e^{i\frac{\pi}{2}}\left(z_k - e^{i\frac{\pi}{4}}z_k\right) + e^{i\frac{\pi}{4}}z_k\ et\ \omega_7 = e^{i\frac{\pi}{2}}\left(z_7 - e^{i\frac{\pi}{4}}z_7\right) + e^{i\frac{\pi}{4}}z_7$
Ou encore :
$\forall\, k \in [\![0\,;7]\!], \omega_k = [e^{i\frac{\pi}{2}}\left(1 - e^{i\frac{\pi}{4}}\right) + e^{i\frac{\pi}{4}}]z_k = \ e^{i\frac{\pi}{4}}[e^{i\frac{\pi}{4}}\left(1 - e^{i\frac{\pi}{4}}\right) + 1]z_k = (\sqrt{2} + i)z_k$

On en déduit que :
$\forall\, k \in [\![0\,;6]\!], \omega_{k+1} = (\sqrt{2} + i)z_{k+1} = (\sqrt{2} + i)e^{i\frac{\pi}{4}}z_k = e^{i\frac{\pi}{4}}\omega_k\ et\ \omega_0 = (\sqrt{2} + i)z_0 = (\sqrt{2} + i)e^{i\frac{\pi}{4}}z_7 = e^{i\frac{\pi}{4}}\omega_7$
Et par conséquent, $B_0B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$ est un octogone régulier.

Il reste à établir que la longueur de son côté est $\sqrt{3}$ fois celle du côté de l'octogone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$.
Pour ce faire, il suffit de déterminer le module de $\omega_1 - \omega_0$.
$|\omega_1 - \omega_0| = |(\sqrt{2} + i)(z_1 - z_0)| = |\sqrt{2} + i||z_1 - z_0| = \sqrt{3}|z_1 - z_0|$
Ainsi, on a bien : $B_1B_0 = \sqrt{3}A_1A_0$.

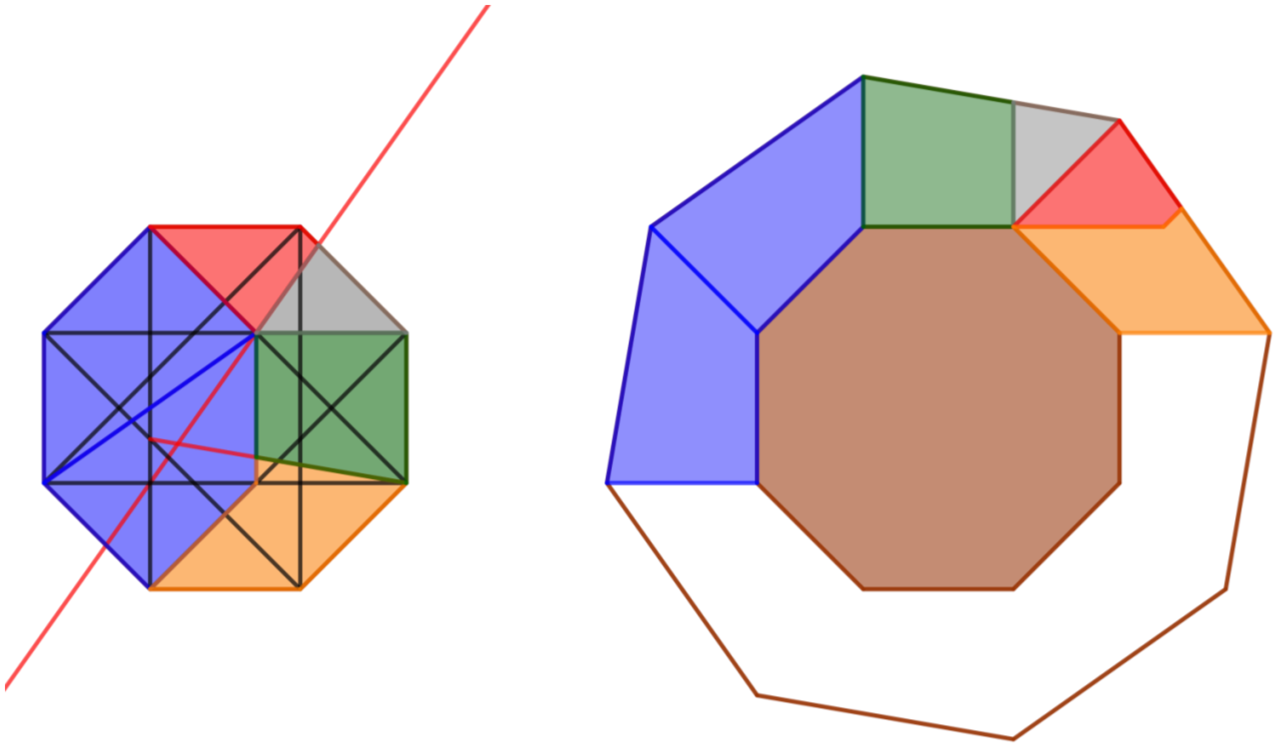
3ème démarche

Il a été établi précédemment que : $\forall\, k \in [\![0\,;7]\!], \omega_k = (\sqrt{2} + i)z_k$
Ce qui signifie que pout tout entier $k \in [\![0\,;7]\!]$, B_k est l'image de A_k par la similitude directe de centre O, d'angle l'argument de $\sqrt{2} + i$ et de rapport $|\sqrt{2} + i| = \sqrt{3}$.

Retour au sommaire

On peut donc conclure que $B_0B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$ est bien un octogone régulier et un agrandissement de $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ dans le rapport $\sqrt{3}$.

Pour finir, nous offrons aux lecteurs du Petit Vert le découpage ci-dessous permettant d'obtenir un octogone régulier à partir de trois octogones réguliers identiques dont un est laissé en un seul morceau.



Solution proposée par Fabrice Laurent

Voici une solution analytique pour le problème des deux octogones.

On place le centre O du petit octogone à l'origine d'un repère orthonormé, et cet octogone est inscrit dans un cercle de rayon 1.

Tout d'abord, on peut montrer que la longueur du côté du petit octogone est $c = \sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Dans ce repère, les coordonnées des points A et B sont :

$$x_A = \cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$y_A = \sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$x_B = \cos\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$y_B = \sin\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Le point A' est à l'intersection de la droite (AD) et du cercle de centre A et de rayon c.
Le point B' est à l'intersection de la droite (BE) et du cercle de centre B et de rayon c.

Retour au sommaire

On en déduit que les coordonnées des points A' et B' sont :

$x_{A'} = x_A + c$ $\quad$ $x_{B'} = x_B + \frac{c}{\sqrt{2}}$

$y_{A'} = y_A$ $\quad$ $y_{B'} = y_B + \frac{c}{\sqrt{2}}$

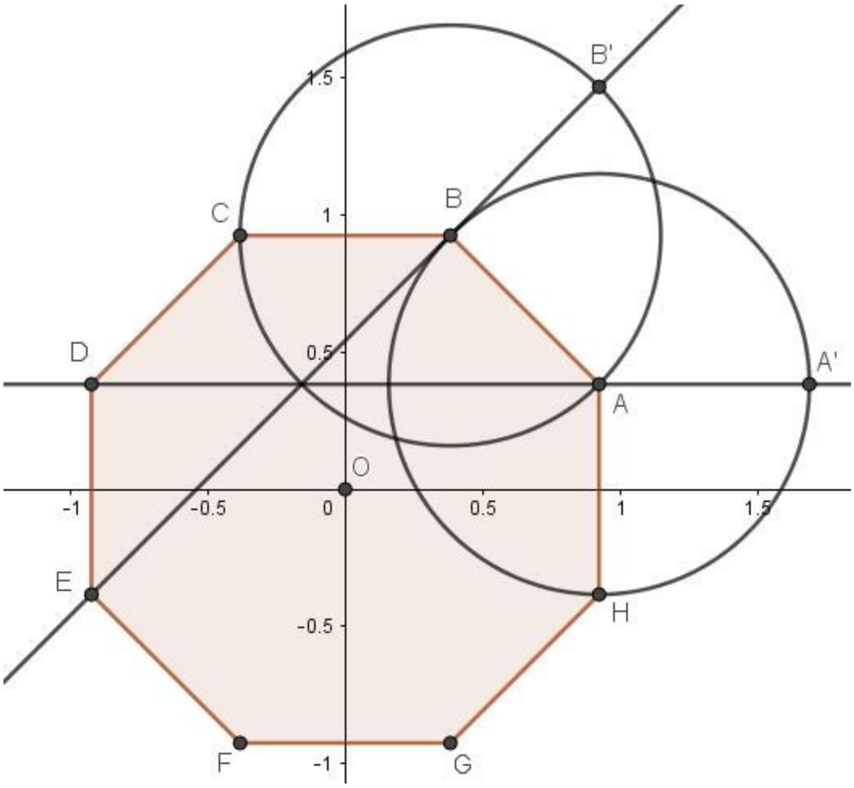
Après quelques calculs, on trouve :

$OA' = \sqrt{x_{A'}^2 + y_{A'}^2} = \sqrt{3}$ et $OB' = \sqrt{x_{B'}^2 + y_{B'}^2} = \sqrt{3}$

Pour des raisons de symétrie, on en déduit que :
- les autres points du grand octogone sont aussi sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$;
- les longueurs des côtés du grand octogone sont toutes égales.

Ceci prouve que le grand octogone est régulier.

Le rapport de longueurs entre le grand octogone et le petit octogone est de $\sqrt{3}$, donc le rapport d'aires est bien de 3.



Retour au sommaire

PROBLÈME N°147

proposé par Philippe FÉVOTTE

Soient x, y, z trois nombres strictement positifs tels que $x+y+z=1$.
Proposer plusieurs méthodes de résolution de l'équation (E) : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=9$

SOLUTION DU PROBLÈME N°146

proposé par Fabien LOMBARD

Énoncé :
On considère un livre de n pages, numérotées 1, 2, 3…, 10, 11, … et on note u_n le nombre de caractères utilisés pour la pagination. Ainsi $u_1=1$, $u_2=2$,…. $u_{10}=11$, $u_{11}=13$…

1) Donner une expression explicite de u_n.
2) On écrit les nombres utilisés dans la pagination à la suite les uns des autres : 1234…101112…
   a) Quel est le 365ième chiffre écrit ? Sur quelle page se trouve-t-il ?
   b) Quel serait le 1 000 000ième chiffre écrit ? Sur quelle page se trouverait-t-il ?

Solution :
Une solution a été proposée. Les approches étant en partie différentes, je présenterai les deux solutions, celle de Jacques Choné et celle de l'auteur Fabien Lombard.

1) On remarque que $n \in \langle 1,2,\dots 9\rangle$ on a $u_n=n$..

Dans un premier temps, on étudie un cas particulier, par exemple u_{2021}. Il y a 9 caractères pour les pages de 1 à 9, puis 90×2 caractères pour les pages 10 à 99, il y en a 900×3 pour les pages de 100 à 999, et enfin $(2021-999)\times 4$ pour les pages 1000 à 2021.
Donc $u_{2021}=9+90\times 2+900\times 3+(2021-999)\times 4=6977$.
On va généraliser en introduisant pour tout entier n le nombre $m(n)$ de chiffres du nombre n.
On a $m(n)=E(\log(n))+1$ où $\log(n)$ désigne le logarithme décimal de n.
On obtient alors $u_n=\left(\sum_{k=1}^{m(n)-1} 9\times 10^{k-1}k\right)+\left(n-(10^{m(n)-1}-1)\right)m(n)$.
Or $\sum_{k=1}^{p} kx^{k-1}=\frac{px^{p+1}-(p+1)x^{p}+1}{(1-x)^2}$ (obtenu en dérivant $\sum_{k=0}^{p} x^k=\frac{1-x^{p+1}}{1-x}$)
On obtient alors $u_n=\frac{1}{9}\left((m(n)-1)10^{m(n)}-m(n)10^{m(n)-1}+1\right)+\left(n-(10^{m(n)-1}-1)\right)m(n)$.
Soit après réduction $u_n=(n+1)m(n)-\frac{1}{9}\left(10^{m(n)}-1\right)$
Fabien Lombard obtient le même résultat en utilisant une astuce élégante. Reprenons le cas $n=2021$. On écrit une colonne de quatre 0 et sur chacune des colonnes de 1 à 2021, on complète les colonnes en précédant les nombres par des 0. Ce qui donne :
0 0 0 … 0 0 0 … 0 0 0 0 … 0 1 1 1 1 … 2 2
0 0 0 … 0 0 0 … 0 1 1 1 … 9 0 0 0 0 … 0 0
0 0 0 … 0 1 1 … 9 0 0 0 … 9 0 0 0 0 … 2 2
0 1 2 … 9 0 1 … 9 0 1 2 … 9 0 1 2 3 … 0 1
On a un tableau de 4 lignes et 2022 colonnes ; il suffit de compter les 0 « inutiles » qui ont été rajoutés. Ils sont au nombre de 10^3 pour la première ligne, 10^2 pour la deuxième ligne, 10^1 pour la troisième ligne et 10^0 pour la quatrième ligne, soit au total $1+10^1+10^2+10^3=\frac{10^4-1}{10-1}$.
Par conséquent $u_{2021}=4\times 2022-\frac{10^4-1}{9}=6977$.
On généralise aisément cette méthode à un nombre n de $m(n)$ chiffres.

Retour au sommaire

2) Jacques Choné répond à cette question en utilisant un programme écrit en langage Python.

```
def chif(xieme):
   s="0";k=1
   while len(s)<=xieme:
      s+=str(k);k+=1
   return(s[xieme],k-1)

>>> chif(365)
('5', 158)
>>> chif(10**6)
('1', 185185)
```

C'est-à-dire que le 365[ième] chiffre est un 5 et qu'il se trouve sur la page 158 ; le millionième chiffre serait un 1 et il serait sur la page 185 185

Fabien Lombard utilise des moyens plus « classiques » en considérant les valeurs de u_n correspondant au changement du nombre de chiffres. Ainsi,

$u_9 = 9$, $u_{99} = 189$, $u_{999} = 2\,889$, $u_{9\,999} = 38\,889$, $u_{99\,999} = 488\,889$ et $u_{999\,999} = 5\,888\,889$

$u_{99} < 365 < u_{999}$ donc le 365[ième] chiffre sera sur une page entre 100 et 999.

Or $365 - 189 = 176 = 3 \times 58 + 2$

Par conséquent après 99, on a écrit les chiffres des pages 100 à 157, puis les deux premiers chiffres de la page 158, soit le chiffre 5.

De même $u_{99\,999} < 1\,000\,000 < u_{999\,999}$ et $1\,000\,000 - 488\,889 = 511\,111 = 6 \times 85\,185 + 1$; le millionième chiffre serait le premier chiffre de la page 185 185, soit le chiffre 1.

Notez que la suite 9, 189, 2 889, 38 889, 488 889, … est référencée A033713 dans l'encyclopédie OEIS.

> *« Soit A un succès dans la vie.*
> *Alors A = x + y + z où x = travailler, y = s'amuser et z = se taire. »*
>
> Albert Einstein

« LE PETIT VERT » est le bulletin de la régionale APMEP Lorraine. Né en 1985, il complète les publications nationales que sont le bulletin « Au fil des maths » et le BGV. Il parait quatre fois dans l'année (mars, juin, septembre et décembre). Son but est d'une part d'informer les adhérents lorrains sur l'action de la Régionale et sur la « vie mathématique » locale, et d'autre part de permettre les échanges « mathématiques » entre les adhérents. Il est alimenté par les contributions des uns et des autres ; chacun d'entre vous est vivement sollicité pour y écrire un article et cet article sera le bienvenu : les propositions sont à envoyer à redaction-petivert@apmeplorraine.fr. Le Comité de rédaction est composé de Geneviève Bouvart, Fathi Drissi, François Drouin, Françoise Jean, Léa Magnier, Walter Nurdin, Aude Picaut, Michel Ruiba, Jacques Verdier et Gilles Waehren.

Retour au sommaire