

ÉTUDE MATHÉMATIQUE

UN CROP CIRCLE EN MEUSE

Fathi DRISSI

L'Est Républicain a publié le 21 août 2021 un article sur l'apparition d'un *Crop Circle* dans le champ de blé de notre collègue Emmanuel Claisse à Chauvency-Le-Château en Meuse. L'article débute ainsi : « Humaine ou paranormale ? Quelle est l'origine de ce *Crop Circle* apparu fin juin dans le champ d'Emmanuel Claisse à Chauvency-le-Château ?

Sur une vingtaine d'ares, des cercles impeccables ont été réalisés dans les blés un mois avant la moisson ».



Crédit photo : Est Républicain

En parcourant l'article, on trouve peu d'explications mathématiques : on se contente de donner le diamètre du grand cercle en précisant que ceux des six autres, tangents au grand, sont dégressifs. Il est aussi indiqué la superficie occupée par ces dessins, mais comme souvent dans ce type d'article, l'auteur délaisse la recherche d'un programme de construction de la figure. Pourtant, le journal consacre une page à l'interview d'une « référence » en France en matière de *Crop Circle* mettant davantage en valeur le côté surnaturel et affirmant au passage que ce *Crop Circle* n'est pas un faux : « Ce n'est pas un faux, il y a une très forte énergie, il n'a rien à voir avec des *Crop Circle* faits avec des planches », comme l'avait été réalisé celui de Sarrautroff évoqué dans le [Petit Vert n° 136](#).

Remarquons aussi que les informations données permettent difficilement de reproduire la figure géométrique. Est-ce volontaire ou un souci de l'auteur de ne pas ennuyer le lecteur avec du contenu mathématique ? Cet article soulève plus de questions qu'il n'apporte de réponses quant à l'origine de ces dessins.

Je trouve dommage que l'on n'accorde que peu ou pas de place dans ces articles à une étude mathématique de ces dessins géométriques car à mon sens cela ajoute au côté mystérieux de ces derniers. Trouver une manière de les reproduire permettrait de les rendre accessibles et de montrer la beauté des mathématiques.

Je ne vais pas me hasarder à apporter des réponses sur l'origine de ces *Crop Circle* ou la manière de les réaliser, mais je me permets de compléter l'article du journal en donnant un programme de construction.

En analysant la photo jointe à l'article, les six cercles tangents au grand me semblent former ce que l'on appelle une chaîne de [Pappus](#).

Étant donné un segment $[AB]$, un point C situé sur ce segment et les cercles c , c_1 et c_2 de diamètres respectifs $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$. La famille de cercles $(c_n)_{n \geq 2}$ telle que c_{n+1} est tangent à c , c_1 et c_n pour tout entier $n \geq 2$ est appelée chaîne de Pappus.

Une première propriété est que les centres des cercles de la chaîne sont sur une ellipse en vertu de la propriété suivante : « Le lieu des centres des cercles tangents à deux cercles donnés est une conique. »

En effet, on peut démontrer cette propriété pour le cas d'une ellipse en utilisant la figure composée des cercles c , c_1 et l'un des cercles c_n définis plus haut et de rayons respectifs r , r_1 et r_n avec n un entier supérieur ou égal à 3. En nommant I le point de contact du cercle c_n avec le cercle c et J avec le cercle c_1 , on a :

O , O_n et I sont alignés et $OO_n = r - r_n$;

O_1 , O_n et J sont alignés et $O_1O_n = r_1 + r_n$;

Il en découle que $OO_n + O_1O_n = r + r_1$. Or $r + r_1$ est une constante, donc le point O_n décrit une ellipse de foyers O et O_1 .

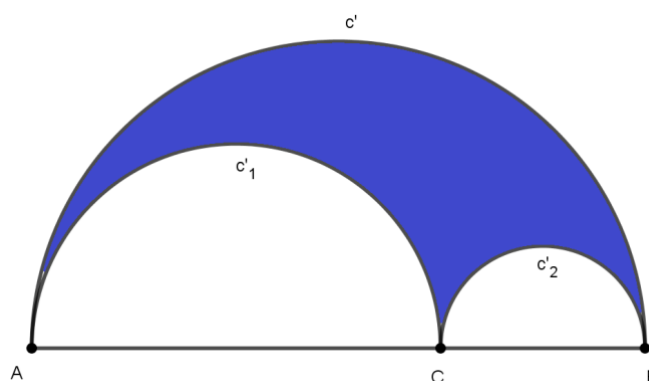
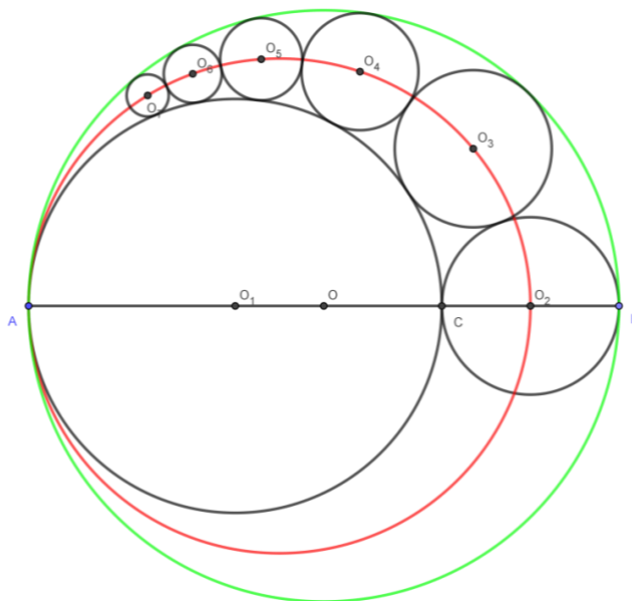
De plus, le cercle c_2 étant tangent aux cercles c et c_1 , son centre O_2 est aussi sur l'ellipse, qui a ainsi pour grand axe AO_2 ou encore $AC + \frac{BC}{2}$.

Une autre propriété de cette chaîne est que les rayons des cercles c_n pour n entier supérieur ou égal à 2 vérifient la relation suivante :

$$r_n = AB \frac{q(1-q)}{2((n-2)^2(1-q)^2 + q)} \text{ où } q = \frac{AC}{AB}$$

Pour démontrer cette relation, il nous faut évoquer l'arbelos (du grec couteau ou tranchet du savetier), un objet géométrique étudié par [Archimède](#) et qui continue de fasciner les mathématiciens en raison de ses multiples propriétés remarquables.

Un arbelos est une région plane délimitée par la réunion de trois demi-cercles tangents deux à deux et situés dans le même demi-plan défini par la droite contenant leurs extrémités. Il se construit ainsi : Soient c' un demi-cercle de diamètre $[AB]$ et C un point de ce diamètre. À l'intérieur du demi-disque ainsi défini on trace les demi-cercles c'_1 et c'_2 de diamètres respectifs $[AC]$ et $[CB]$.



L'une des propriétés dont jouit l'arbelos est qu'il existe un cercle (en rouge) inclus dans cet arbelos et tangent à c' , c'_1 et c'_2 ; on l'appelle cercle inscrit ou encore cercle de Pappus.

Archimède a également déterminé le rayon de ce cercle en fonction de celui des demi-cercles c'_1 et c'_2 :

$$r_3 = \frac{r_1 r_2 (r_1 + r_2)}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}$$

En posant $q = \frac{AC}{AB}$ d'où l'on déduit que

$$r_1 = q(r_1 + r_2) = q \frac{AB}{2}$$

et $r_2 = (1 - q)(r_1 + r_2) = (1 - q) \frac{AB}{2}$, on retrouve la relation à démontrer pour $n=3$:

$$r_3 = \frac{ABq(1-q)}{2((1-q)^2 + q)} = AB \frac{q(1-q)}{2((3-2)^2(1-q)^2 + q)}$$

En poursuivant l'inscription de tels cercles successifs dans l'arbelos, on définit une suite de cercles inscrits : la chaîne de Pappus.

[Le théorème de Descartes](#) permet de donner une relation entre les rayons de deux cercles successifs de cette chaîne, le cercle c_1 et le cercle c . Son énoncé est le suivant :

Si quatre cercles tangents entre eux ont pour courbure k_i , i entier allant de 1 à 4, alors

$$(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2 = 2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2)$$

Ainsi, pour un entier $n \geq 3$, on a : $(k_n + k_{n-1} + k_1 + k)^2 = 2(k_n^2 + k_{n-1}^2 + k_1^2 + k^2)$

où $k_n = \frac{1}{r_n}$, $k_{n-1} = \frac{1}{r_{n-1}}$, $k_1 = \frac{1}{r_1}$ et $k = -\frac{1}{r}$ sont les courbures successives des cercles c_n , c_{n-1} , c_1 et c .

Cette égalité, vue comme une équation du second degré en k_n , permet d'exprimer k_n en fonction de k_{n-1} , k_1 et k : $k_n = k_{n-1} + k_1 + k + \sqrt{k_{n-1}k_1 + k_{n-1}k + k_1k}$.

Ces résultats permettent de démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 2$,

$$r_n = AB \frac{q(1-q)}{2((n-2)^2(1-q)^2 + q)} \text{ où } q = \frac{AC}{AB} = \frac{r_1}{r}$$

À ce stade, on peut donner un programme de construction du *Crop Circle*. Pour cela, il suffit de construire le segment $[AB]$, d'y placer un point C , O_1 milieu de $[AC]$, O_2 milieu de $[BC]$, de tracer le cercle c_1 et le cercle c_2 , de construire l'ellipse de foyers O et O_1 passant par O_2 pour enfin construire les centres O_n , avec n entier allant de 3 à 7, comme troisième sommet d'un triangle dont les deux autres sommets sont O_1 et O_2 et sachant que $O_n O_1 = \frac{AC}{2} + r_n$ et $O_n O_2 = \frac{BC}{2} + r_n$.

Par ailleurs, on distingue sur la photo des traces d'engin évoquant des droites parallèles dont l'une d'elles passe par le centre du plus grand des six cercles tangents à la couronne. De plus, celui-ci semble tangent à la bordure du champ de blé représentée ci-contre en rouge.



Or, il existe une méthode de construction de la chaîne de Pappus à l'aide d'une inversion transformant deux cercles bien choisis en deux droites parallèles et tous les autres cercles de la chaîne en des cercles identiques et tangents à ces deux droites parallèles.

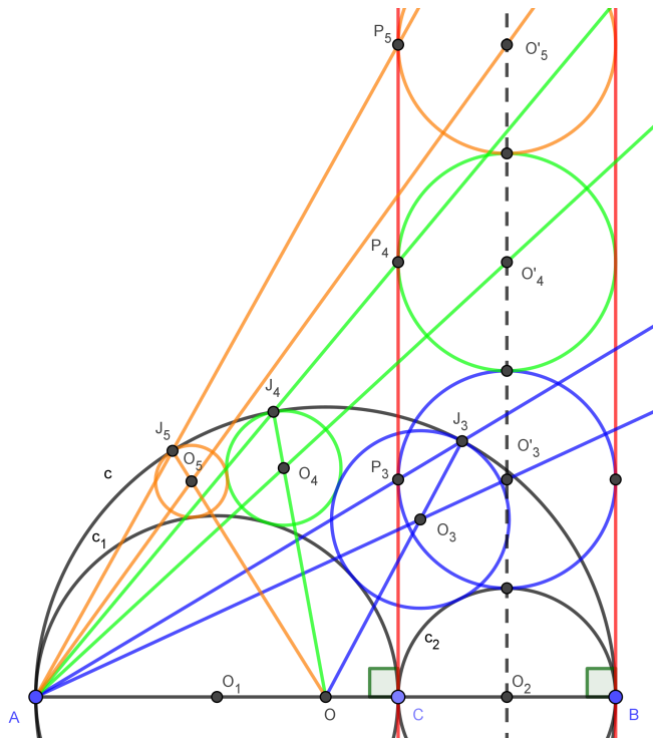
On peut alors se demander si c'est une simple coïncidence ou si ces traces ont joué un rôle dans la réalisation de ce *Crop Circle*.

Le choix de construire cette figure à l'aide d'une inversion permet d'éviter le recours au calcul des rayons des cercles de la chaîne de Pappus et par conséquent les erreurs d'approximation. De plus, la construction des centres des cercles de la chaîne de Pappus est plus aisée que la précédente comme l'illustre la méthode ci-dessous.

En choisissant par exemple l'inversion de pôle A qui laisse le cercle c_2 globalement invariant, le cercle c est alors transformé en la perpendiculaire en C à (AB) et c_1 en la perpendiculaire en B. Le cercle inscrit et tous les cercles de la chaîne sont transformés en des cercles identiques à c_2 , tangents à ces deux perpendiculaires et conservant leur point de tangence.

Les centres O'_n et les points de contact P_n sont construits en reportant le rayon de c_2 .

Le point de contact J_n de c_n avec c est alors l'intersection de (AJ_n) avec c et O_n est l'intersection de (AO'_n) avec $[OJ_n]$.



Grâce aux inversions, dont une présentation a été faite par Alain Satabin dans le [Petit Vert n°137](#), la construction d'une chaîne de Pappus devient plus facile puisqu'elle est ramenée à la construction d'un simple empilement de cercles tous identiques et tangents à deux droites parallèles, nous permettant d'entrevoir au passage que les mathématiques sont aussi un art de transformer un problème où la solution n'est pas évidente en un problème simple.

On ne répétera jamais assez : la connaissance des choses permet la compréhension et évite l'obscurantisme ou la manipulation de ceux qui la détiennent. N'est-ce pas ce qui motive tout enseignant dans sa mission de transmettre ?

Et comme l'a si bien dit Christelle Kunc, on parle trop peu de la beauté des mathématiques dans notre société. Et hélas, la géométrie a perdu la place privilégiée qu'elle occupait autrefois et disparaît peu à peu des programmes scolaires. Pourtant maîtriser la construction d'une aussi belle figure est un art. De même que l'écoute d'un morceau de musique peut donner l'envie de pratiquer un instrument, l'observation de figures géométriques peut permettre au spectateur de rêver, mais aussi d'élever son esprit lorsqu'il lui prend l'envie de comprendre, de reproduire, de transmettre.