PROBLÈME 146

Proposé par Fabien Lombard

On considère un livre de *n* pages, numérotées 1, 2, 3, …, 10, 11, …, *n* et on note u_n le nombre de caractères utilisés pour la pagination depuis la première page.

Ainsi $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, …, $u_{10} = 11$, $u_{11} = 13$, …

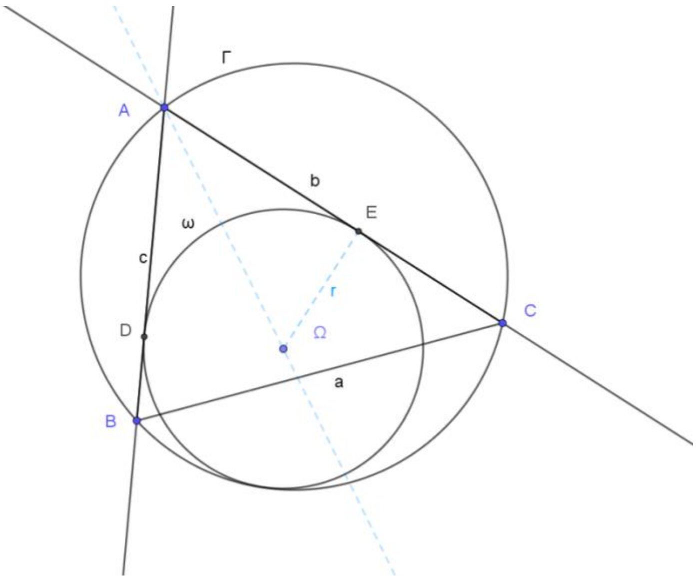
1) Donner une expression explicite de u_n.
2) On écrit les nombres utilisés dans la pagination à la suite les uns des autres : 1234…101112…
    a) Quel est le 365$^{\text{ième}}$ chiffre écrit ? Sur quelle page se trouve-t-il ?
    b) Quel serait le millionième chiffre écrit ? Sur quelle page se trouverait-t-il ?

SOLUTION PROBLÈME 145

Proposé par Jacques Choné

Enoncé

On considère un triangle ABC, son cercle circonscrit Γ et ω le cercle tangent intérieurement à Γ et aux côtés $[A,B]$ et $[A,C]$. Déterminer le rayon r de ω en fonction des longueurs des côtés a, b, c des côtés $[B,C]$ et $[A,C]$. $[A,B]$ du triangle ABC.



Solution

Trois solutions ont été proposées, par Fabien Lombard qui s'appuie sur des relations trigonométriques, par l'auteur Jacques Choné qui introduit des transformations, et par Renaud Dehaye qui étudie des cas particuliers.

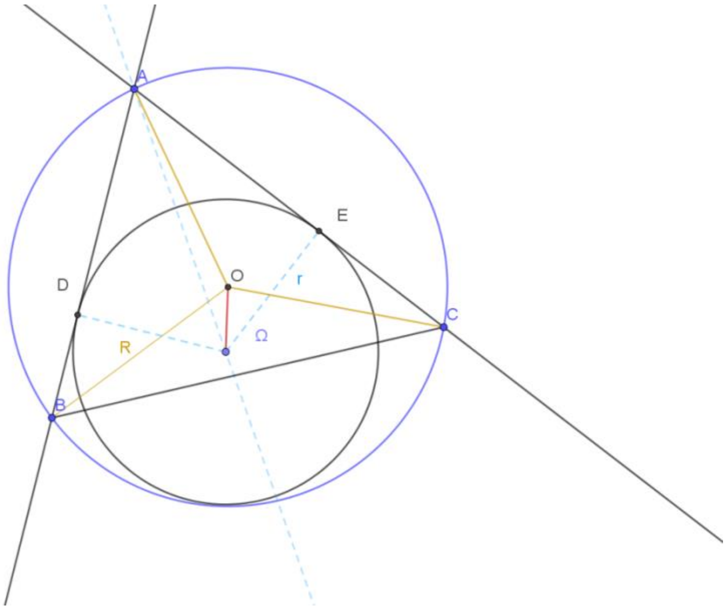
Fabien Lombard rappelle en préalable la méthode des « translations parallèles » de Viète, qui a résolu les problèmes de tracé de cercles astreints à des conditions comme passer par des points, être tangents à des droites ou des cercles, dans sa solution du problème des trois cercles d'Apollonius.

Cette méthode permet de construire le cercle ω à la règle et au compas. Pour cela on pourra voir par exemple l'article de Debart ou le résumé que j'en propose.

Retour au sommaire

Fabien Lombard donne ensuite une démonstration qui s'appuie sur les relations trigonométriques dans des triangles.

Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et R son rayon.



Dans le triangle $AO\Omega$, : $O\Omega^2 = OA^2 + A\Omega^2 - 2OA.A\Omega \cos(\widehat{OA\Omega})$

Soit $(R-r)^2 = R^2 + \frac{r^2}{\sin^2\frac{\hat{A}}{2}} - 2R\frac{r}{\sin\frac{\hat{A}}{2}}\cos(\widehat{OA\Omega})$ (*)

Dans la démonstration ci-dessous, on se place dans le cas de la figure où Ω est extérieur au secteur angulaire. On obtiendrait le même résultat dans l'autre cas.

$\widehat{OA\Omega} = \frac{\hat{A}}{2} - \widehat{OAC}$ et, en utilisant le fait que le triangle ABC est isocèle et des propriétés des angles inscrits, $\widehat{OAC} = \frac{1}{2}(\pi - \widehat{AOC}) = \frac{1}{2}(\pi - 2\hat{B})$ ou encore

$\widehat{OAC} = \frac{1}{2}(\pi - 2\hat{B}) = \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - 2\hat{B}) = \frac{1}{2}(\hat{A} - \hat{B} + \hat{C})$

Par conséquent $\widehat{OA\Omega} = \frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{C})$

En reportant ce résultat dans (*), on obtient :

$$R^2 - 2Rr + r^2 = R^2 + \frac{r^2}{sin^2\frac{\hat{A}}{2}} - 2R\frac{r}{sin\frac{\hat{A}}{2}}cos\,\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}$$

Soit $r\left(1 - sin^2\frac{\hat{A}}{2}\right) = 2Rsin^2\frac{\hat{A}}{2} - sin\frac{\hat{A}}{2}cos\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}$

On a donc : $rcos^2\frac{\hat{A}}{2} = 2Rsin\frac{\hat{A}}{2}\left(sin\frac{\hat{A}}{2} - cos\,\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}\right)$

En notant que $sin\frac{\hat{A}}{2} = cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\hat{A}}{2}\right) = cos\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}$, on obtient que

$$r\cos^2\frac{\hat{A}}{2} = 2R\sin\frac{\hat{A}}{2}\left(\cos\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2} - \cos\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}\right)$$

Soit $r\cos^2\frac{\hat{A}}{2} = 4R\sin\frac{\hat{A}}{2}\sin\frac{\hat{B}}{2}\sin\frac{\hat{C}}{2}$

On obtient alors la relation simple : $r\cos^2\frac{\hat{A}}{2} = r_i$

où r_i le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC.

On sait de plus que si on note $p = \frac{a+b+c}{2}$, on a $aire(ABC) = r_i p$ et la formule de Héron : $aire(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Par conséquent $r\cos^2\frac{\hat{A}}{2} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$

Retour au sommaire

Il reste à exprimer $cos^2\frac{\hat{A}}{2}$ en fonction de a, b, c.

Or $cos^2\frac{\hat{A}}{2} = \frac{1}{2}(1 + cos\hat{A})$

En utilisant la relation $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\hat{A}$, on obtient $cos^2\frac{\hat{A}}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}\right)$

Soit $cos^2\frac{\hat{A}}{2} = \frac{1}{4bc}(2bc - a^2 + b^2 + c^2)$ ou encore $cos^2\frac{\hat{A}}{2} = \frac{1}{4bc}(b + c - a)(b + c + a)$

On retrouve une autre relation connue dans le triangle : $\cos^2\frac{\hat{A}}{2} = \frac{p(p-a)}{bc}$

On obtient finalement $r = \frac{bc}{p^2}\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-a}$, soit après simplification $r = \frac{bc}{p}\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

Par ailleurs Fabien Lombard transforme cette expression pour en obtenir une plus concise. En s'appuyant sur les formules (voir par exemple « la géométrie du triangle » de René et Yvonne Sortais) reliant les rayons des cercles circonscrit, inscrit, exinscrits et mesure des angles. On a :

$r_i = 4R\sin\frac{\hat{A}}{2}\sin\frac{\hat{B}}{2}\sin\frac{\hat{C}}{2}$, $r_A = 4R\sin\frac{\hat{A}}{2}\cos\frac{\hat{B}}{2}\cos\frac{\hat{C}}{2}$ et des formules analogues pour r_B et r_C

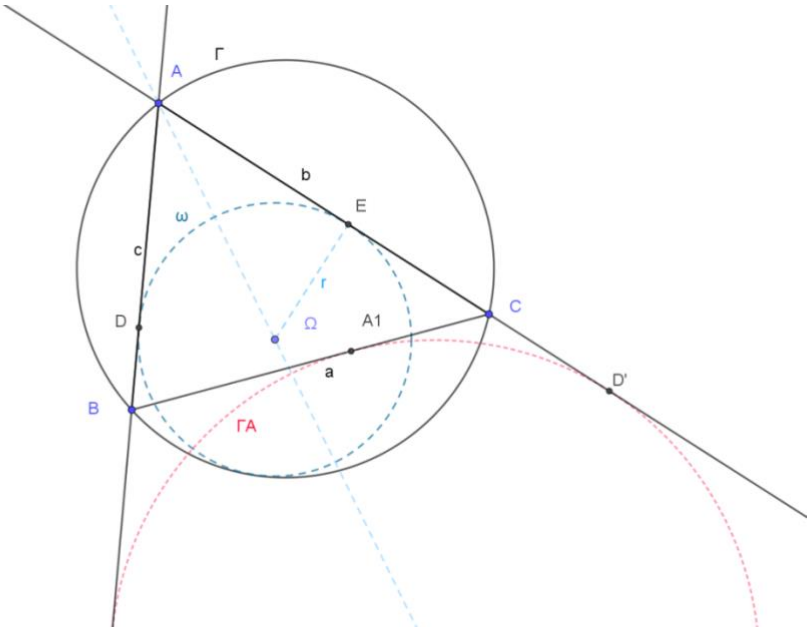
On en déduit que $r_A + r_B + r_C = 4R + r_i$ et que $r_A - r_i = 4Rsin^2\frac{\hat{A}}{2}$.

Par conséquent $r_B + r_C = 4Rcos^2\frac{\hat{A}}{2}$ et pour finir $r = \frac{4Rr_i}{r_B + r_C}$ ce qui est, comme il dit, plus « joli ».

Enfin, Fabien Lombard signale une extension de ce problème dans un exercice corrigé par un élève du lycée Louis-Legrand en … 1897 ! Autre temps, autres mathématiques.

La solution de Jacques Choné suit l'idée, assez naturelle, d'introduire une application qui transforme un problème de tangence entre cercles en un problème de tangence cercle – droite. On introduit pour cela une inversion qui transforme l'un des deux cercles en une droite « remarquable ».

D'où l'idée d'introduire une inversion I de pôle A et de rapport $k > 0$.



Soit $B' = I(B)$ et $C' = I(C)$. On a alors $AB' = \frac{k}{b}$ et $AC' = \frac{k}{c}$

En choisissant $k = bc$, on obtient alors $AB' = c$ et $AC' = b$, ainsi $B' = \sigma(B)$ et $C' = \sigma(C)$ où σ est la symétrie par rapport à la bissectrice intérieure du triangle ABC issue de A.

En notant $f = I \circ \sigma$, on vérifie aisément que I et σ commutent, que f est involutive et que f échange B et C.

On en déduit que $f(\Gamma \setminus \{A\}) = (BC)$, $f(AB) = (AC)$ et $f(AC) = (AB)$.

De plus I et σ, conservent les contacts, donc $f = I \circ \sigma$ les conserve également.

Par conséquent ω étant tangent au cercle Γ, et aux droites (AB) et (AC), son image est tangente aux droites (BC), (AC) et (AB). C'est donc le cercle inscrit au triangle ABC ou le cercle relatif à A exinscrit à ce même triangle.

Retour au sommaire

Soit D le point de contact du cercle ω et de la droite (AB) et notons D' l'image de D par la transformation f. Le point $D \in [A,B]$) donc $D' \in (AC)$ et $AD < c$

Or $AD \times AD' = bc$, par conséquent $AD' > b$; ce qui signifie que $D' \notin [A,C]$).

On en déduit que $f(\omega) = \Gamma_A$ cercle relatif à A exinscrit au triangle ABC.

f est involutive donc $f(\Gamma_A) = \omega$, soit $I \circ \sigma(\Gamma_A) = \omega$.

Sachant que $\sigma(\Gamma_A) = \Gamma_A$, on en déduit que $I(\Gamma_A) = \omega$.

Pour déterminer le rayon r de ω il suffit de connaitre la relation entre le rayon d'un cercle et celui de son image par une inversion :

<u>Prop 1</u> : si Σ est un cercle de centre O et de rayon R qui a pour image le cercle Σ' de rayon R' par l'inversion de centre A et de rapport k, alors $\frac{R'}{R} = \frac{k}{P(A,\Sigma)}$, où $P(A,\Sigma)$ désigne la puissance du point A par rapport au cercle Σ.

Donc si on note r_A le rayon du cercle exinscrit Γ_A, on a $\frac{r}{r_A} = \frac{bc}{P(A,\Gamma_A)} = \frac{bc}{AD'^2}$

Or $AD' = AC + CD' = b + CA_1$ et $AD' = AE' = AB + DE' = c + BA_1$

On en déduit que $2AD' = b + c + CA_1 + BA_1 = b + c + a$.

En notant $p = \frac{a+b+c}{2}$, le demi-périmètre du triangle ABC, on a donc $AD' = p$ et $\frac{r}{r_A} = \frac{bc}{p^2}$

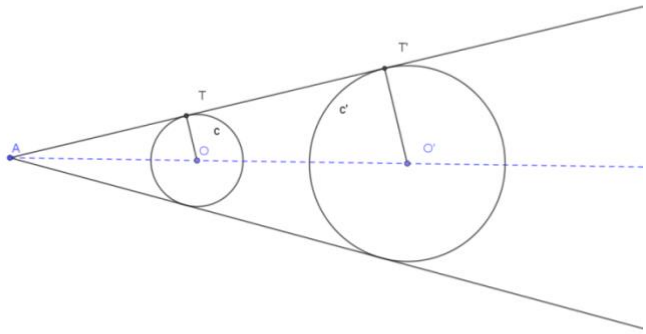
Il reste à déterminer r_A en fonction de a , b et c

<u>Prop 2</u> : $r_A(p-a) = aire(ABC)$

En utilisant la formule de Héron : $aire(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, on obtient finalement $r = \frac{bc}{p^2}\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-a}$, soit après simplification $r = \frac{bc}{p}\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

ANNEXE

<u>Démonstration Prop1</u>



O' n'est pas l'image de O par l'inversion I, mais l'image de T est T'

donc $OT' = \frac{k}{OT}$ et par conséquent $\frac{OT'}{OT} = \frac{k}{OT^2} = \frac{k}{P(A,c)}$

Les triangles ATO et $AT'O'$ sont homothétiques, donc $\frac{R'}{R} = \frac{OT'}{OT} = \frac{k}{P(A,c)}$

<u>Démonstration Prop 2</u>

Si on note I_A le centre du cercle relatif à A, exinscrit au triangle ABC, on a :

$$aire(ABC) = aire(ABI_AC) - aire(I_ABC) = aire(ABI_A) + aire(ACI_A) - aire(BCI_A)$$

Donc $aire(ABC) = \frac{1}{2}(AB \times r_A) + \frac{1}{2}(AC \times r_A) - \frac{1}{2}(BC \times r_A)$

Soit $aire(ABC) = \frac{1}{2}(c + b - a) \times r_A) = \frac{1}{2}(2p - 2a) \times r_A) = (p-a) \times r_A)$

Retour au sommaire