ÉTUDE MATHÉMATIQUE

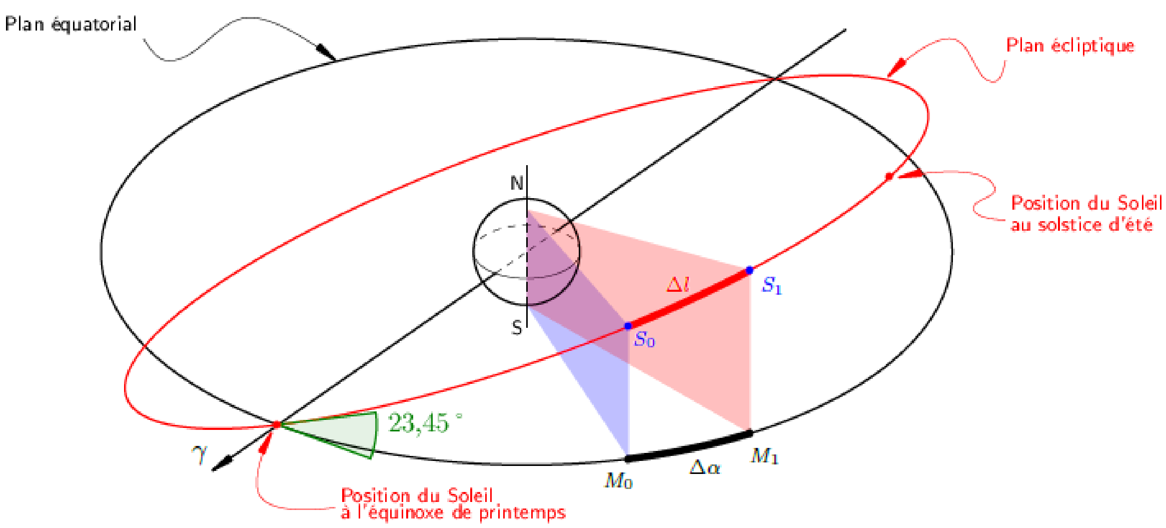
ÉLEMENTS DE CALCUL POUR L'ASTRONOMIE (4ÈME PARTIE) L'ÉQUATION DU TEMPS

Alain Satabin

1. Le problème

L'intervalle de temps séparant deux passages successifs du Soleil dans le plan méridien (midi au cadran solaire), appelé *jour solaire*, n'est pas constant.

Vu de la Terre, le Soleil tourne sur une ellipse dans le plan écliptique, à raison d'un tour en une année (tropique), durée séparant deux passages successifs au point d'équinoxe de printemps. De plus, la Terre tourne sur elle-même à vitesse supposée constante. On note $\boldsymbol{\tau}$ le *jour stellaire*, c'est à dire l'intervalle de temps séparant le passage dans le plan méridien d'une étoile fixe. Négligeant la précession des équinoxes, ce jour stellaire se confond avec le *jour sidéral*, intervalle de temps séparant deux passages successifs du point vernal dans le plan méridien.



Supposons qu'à un instant donné t_0, le Soleil, alors situé en S_0, passe dans le plan méridien du lieu d'observation (en bleu clair sur la figure). Le lendemain, à l'instant $t_{0+\tau}$, on sera revenu à la même position (SNM_0), mais le Soleil aura avancé sur son orbite et sera en S_1. Il faudra donc que le plan méridien avance d'un angle $\Delta\alpha$ complémentaire, et sachant qu'il tourne d'un degré en un temps de $\frac{\tau}{360}$, l'instant suivant de passage au méridien est donné par la relation :

$$t_1 = t_0 + \tau + \frac{\tau}{360} \times \Delta\alpha$$

Et donc la durée séparant deux passages successifs du Soleil au méridien est :

$$t_1 - t_0 = \tau\left(1 + \frac{\Delta\alpha}{360}\right)$$

Si τ est constant, $\Delta\alpha$ ne l'est pas … et ceci pour deux raisons :

- la distance angulaire Δl parcourue par le Soleil sur l'écliptique en un temps τ n'est pas constante (loi des aires),
- l'angle « de projection » que fait Δl avec $\Delta\alpha$ n'est pas constant non plus : il varie de 23,45° aux équinoxes à 0° aux solstices.

Retour au sommaire

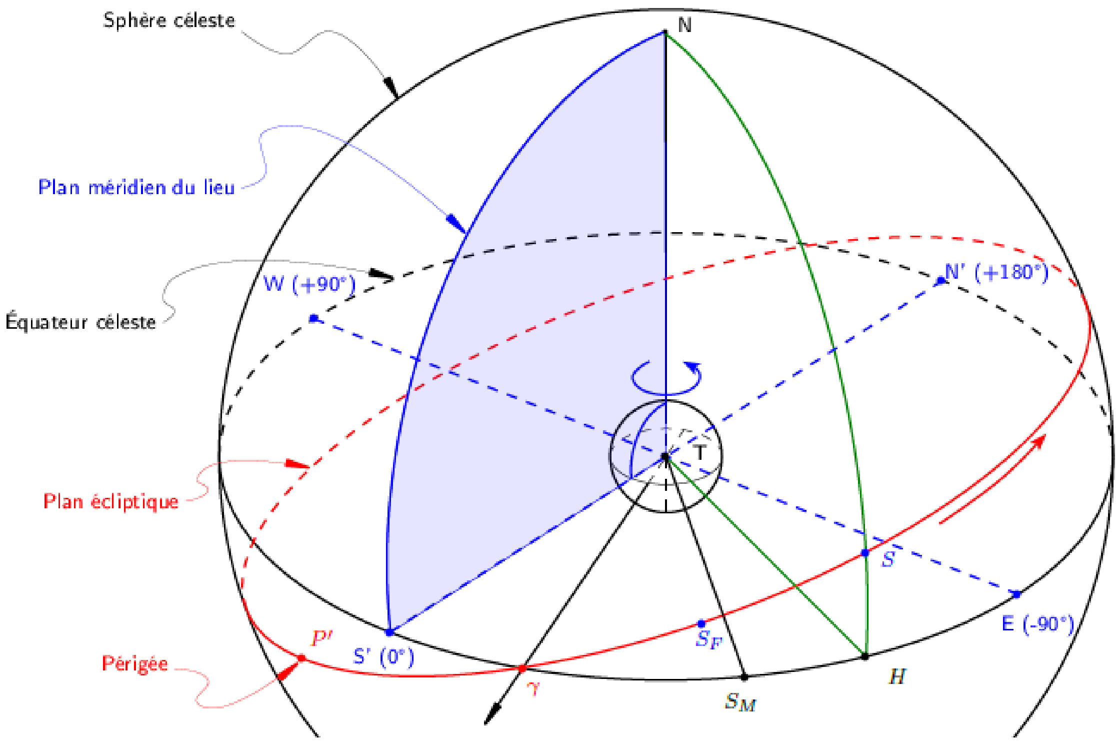
2. La solution

2.1. Soleil fictif et Soleil moyen

On résout le problème en deux temps :

- on considère un *soleil fictif* S_F qui parcourt l'écliptique à vitesse constante, coïncidant avec le soleil vrai S au moment du passage au périgée P',
- on considère un soleil moyen S_{FM} qui parcourt l'équateur céleste à vitesse constante, coïncidant avec le soleil fictif S_F au moment du passage en γ à l'équinoxe de printemps.

Ces trois soleils ont la même période de révolution (*l'année tropique*) et le soleil moyen présente la particularité intéressante de tourner dans le plan équatorial à vitesse constante. La conséquence est que l'intervalle de temps séparant deux passages successifs du soleil moyen dans un plan méridien donné est constant. Cette durée définit le *jour moyen*, ou encore jour tout court, subdivisé ensuite en 24 heures égales chacune, comptant 60 minutes de 60 secondes. Sur cette base, l'année tropique vaut : $A_t = 365{,}242199$ jours.



2.2. Quelques notations

Sur le dessin ci-dessus, le Soleil S parcourt l'écliptique dans le sens indiqué par la flèche rouge. Il est en P' début janvier et son passage en γ définit l'équinoxe de printemps. Au cours d'une journée, le plan méridien tourne dans le sens de la flèche bleue, entrainant avec lui le repère $(S'WN'E)$. Dans ce repère, les angles sont comptés dans le sens horaire (indirect). Le point H est le « projeté » du Soleil réel sur le plan équatorial et on définit les quantités suivantes :

- T_{sm} -- Temps solaire moyen : c'est l'angle $\widehat{\mathrm{S'TS}_M}$ (entre -180° et + 180°)
- T_{sv} -- Temps solaire vrai : c'est l'angle $\widehat{\mathrm{S'TH}}$ (entre -180° et + 180°)
- H_m -- Heure *moyenne :* $H_m = \frac{T_{sm}}{15} + 12\widehat{\mathrm{N'TS}_M}$ (en heures décimales dans [0 ; 24])
- H_v -- Heure *vraie :* $H_v = \frac{T_{sv}}{15} + 12\widehat{\mathrm{N'TH}}$ (en heures décimales dans [0 ; 24])
- L -- *Longitude moyenne du Soleil* : c'est la longitude écliptique de S_F en degrés, origine en γ, sens direct)

Retour au sommaire

2.3. Vous avez l'heure ?

H_v est l'heure indiquée par un cadran solaire. Il est midi au Soleil (12h) lorsque S' est en H. Au cours de l'année, les heures vraies ne sont pas toutes égales.

H_m est une heure locale réglée sur le soleil moyen. Elle dépend évidemment de la longitude θ du lieu d'observation mais présente l'avantage d'être régulière. En effet, une heure moyenne est le $24^{è}$ de l'intervalle séparant deux passages successifs du soleil moyen dans le plan méridien et cette période est constante.

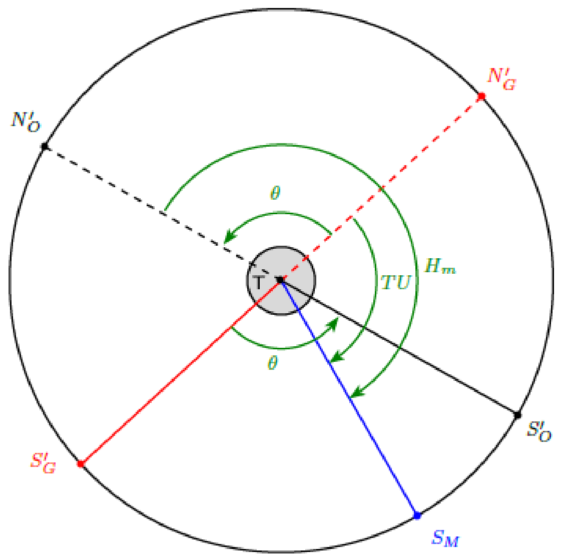
Le décalage entre l'heure moyenne et l'heure vraie est appelé *Équation du temps* et noté E. C'est l'angle HTS_M de la figure, mesuré en heures dans le sens horaire (indirect), et on a :

$$E = H_m - H_v = \frac{T_{sm} - T_{sv}}{15}$$

Le *Temps Universel*, noté TU, est l'heure moyenne du méridien de Greenwich et sert de référence.

L' *Heure Légale*, notée HL, d'un lieu est définie de façon arbitraire pour une zone en ajoutant un correctif δH au temps universel et correspond à l'heure indiquée par les montres. Par exemple en France métropolitaine, $\delta H = +1$ en hiver et $\delta H = +2$ en été.

2.4. Expression de l'heure légale



Regardons la scène du pôle nord céleste. Le disque grisé central est la Terre et le grand cercle est l'équateur céleste. Les angles sont mesurés en heures et le sens positif est le sens horaire. Le segment rouge $\boldsymbol{TS'_G}$ (respectivement $\boldsymbol{TS'_O}$) est le plan méridien de Greenwich (respectivement de l'observateur). On retrouve ici le fait que la latitude $\boldsymbol{\theta}$ de l'observateur est comptée négativement à l'est de Greenwich, et positivement vers l'ouest. Les heures moyennes ($\boldsymbol{TU}$ pour Greenwich et $\boldsymbol{H_m}$ pour l'observateur) sont indiquées comme des angles.

Par relation de Chasles sur les angles orientés, nous lisons sur ce dessin la relation suivante :

$$\boldsymbol{TU = H_m + \theta}$$

Compte tenu du fait que l'heure légale est donnée par la relation :

$$\boldsymbol{HL = TU + \delta H}$$

Et que l'équation du temps nous fournit le décalage entre l'heure solaire et l'heure moyenne :

$$\boldsymbol{H_m = H_v + E}$$

On en déduit, pour un lieu de latitude $\boldsymbol{\theta}$ et de correctif horaire $\boldsymbol{\delta H}$:

Relation 1

$$HL = H_v + E + \theta + \delta H$$

relation qui permet de calculer l'heure légale du lieu (HL) à partir de l'heure lue sur un cadran solaire $(\mathrm{H_v})$. Cette équation permet aussi, en particulier, de déterminer l'heure légale de passage du Soleil dans le plan méridien en prenant $\mathrm{H_v} = 12\mathrm{h}$.

Évidemment, pour que cette formule soit utilisable, il nous faut connaître la valeur de E et c'est ce qui va nous occuper maintenant.

Retour au sommaire

3. Calcul de l'équation du temps

3.1. Expression de la longitude moyenne

Nous calculons ici des longitudes écliptiques géocentriques. Leur origine est le point vernal γ et les angles sont mesurés en degré, le sens positif étant le sens direct (antihoraire). La notation γ représente le point de l'écliptique (et de l'équateur) et $\vec{\gamma}$ représente la direction de référence des angles de vecteurs.

Le soleil fictif tourne sur l'écliptique à vitesse constante, faisant un tour en une année tropique. Si on note t_0 l'instant du dernier passage au périgée P', l'angle $\left(\overrightarrow{TP'}, \overrightarrow{TS_F}\right)$ exprimé en degré à l'instant t vaut $\frac{360(t-t_0)}{A_t}$. On remarquera que c'est exactement l'expression de l'anomalie moyenne M de la Terre et qu'elle nous est fournie en radian dans le tableau « Données Planètes1 du PV145 »

D'autre part, le soleil fictif coïncide avec le Soleil lors de son passage au périgée, et le Soleil est au périgée $(S = S_F = P')$ lorsque la Terre est au périhélie de son orbite $(T = P)$. En se plaçant à cet instant t_0, on peut voir que la longitude géocentrique du périgée $\left(\vec{\gamma}, \overrightarrow{TP'}\right)$ est en relation avec la longitude héliocentrique du périhélie de l'orbite terrestre ϖ :

$$\left(\vec{\gamma}, \overrightarrow{TP'}\right) = \left(\vec{\gamma}, \overrightarrow{PP'}\right) = \left(\vec{\gamma}, \overrightarrow{P'P}\right) + 180 = \left(\vec{\gamma}, \overrightarrow{SP}\right) + 180 = \overline{w} + 180.$$

La longitude moyenne est donc obtenue par relation de Chasles :

$$L = \left(\vec{\gamma}, \overrightarrow{TS_F}\right) = \left(\vec{\gamma}, \overrightarrow{TP'}\right) + \left(\overrightarrow{TP'}, \overrightarrow{TS_F}\right) = M + \overline{w} + 180.$$

Ce qui, avec les tableaux (Données Planètes1) et (Données Planètes2) et le fait que pour la Terre, $\overline{w} = w$, nous donne :

$$\mathrm{L} = (-0{,}0397 + 0{,}017201969\ N) \times \frac{180}{\pi} + 101{,}24 + 0{,}0000471\ N + 180\ .$$

Relation2

$L = 0{,}9856473N + 278{,}97$ en degré
N étant le temps écoulé, en jour décimal, depuis le 0 janvier 1901 à 0 heure.

Remarquons aussi que S_M et S_F tournant régulièrement avec la même période et coïncidant au passage en γ, la longitude écliptique de S_F est en même temps l'ascension droite de S_M:

$$\mathrm{L} = \left(\vec{\gamma}, \overrightarrow{TS_F}\right) = \left(\vec{\gamma}, \overrightarrow{TS_M}\right).$$

3.2. Coordonnées équatoriales du Soleil

Nous voulons ici calculer l'ascension droite (α) et la déclinaison (δ) du Soleil à un instant donné.

$$\alpha(S) = \left(\vec{\gamma}, \overrightarrow{TH}\right) et\ \delta(S) = \left(\overrightarrow{TH}, \overrightarrow{TS}\right)$$

Dans le triangle sphérique (γ, H, S)[1], rectangle en H, le côté $\widehat{\gamma H}$ vaut α, le côté $\widehat{HS}$ vaut δ, l'angle en γ vaut 23,45° et le côté $\widehat{\gamma S}$ vaut λ, longitude géocentrique du Soleil qui se déduit de λ longitude héliocentrique de la Terre[2]:

$$\lambda' = \left(\vec{\gamma}, \overrightarrow{TS}\right) = \left(\vec{\gamma}, \overrightarrow{ST}\right) + 180 = \lambda + 180$$

Les relations trigonométriques 1 et 2 nous donnent :

$$\cos(\lambda') = \cos\alpha\ \cos(\delta) + \sin(\alpha)\sin(\delta)\cos(90°) \text{ et } \sin(\lambda')\sin(23{,}45°) = \sin(\delta)\sin(90°)$$

La seconde nous permet de calculer $cos(\delta)$, sachant qu'il est positif car $\delta \in]-90°\,;\,90°[$

$$\cos(\delta) = \sqrt{\{1 - \sin^2(\delta)\}} = \sqrt{\{1 - \sin^2(\lambda')\sin^2(23{,}45°)\}} \quad \text{avec de plus}$$

$$\delta = \arcsin\left(\sin(\lambda')\sin(23{,}45)\right)$$

[1] Voir figure 2.1

[2] Voir équation 6

Retour au sommaire

Et en reportant dans la première, on obtient :

$$\cos(\alpha) = \frac{\cos(\lambda')}{\sqrt{(1-\sin^2(\lambda'))\sin^2(23{,}45°)}}$$

Remarquons que, une fois remis entre −180° et + 180°, λ et α ont le même signe, et que c'est aussi le signe de leur sinus. On en déduit que :

$$\alpha \;=\; \mathrm{Sgn}(\sin(\lambda')) \times \;\arccos\left(\frac{\cos(\lambda')}{\sqrt{1-\sin^2(\lambda')\sin^2(23{,}45°)}}\right)$$

Compte tenu du fait que $\lambda' = \lambda + 180$, on obtient les coordonnées équatoriales du Soleil :

$$\boxed{\alpha(S) \;=\; \mathrm{Sgn}(\sin(\lambda)) \times \;\arccos\left(\frac{\cos(\lambda)}{\sqrt{1-\sin^2(\lambda)\sin^2(23{,}45°)}}\right)}$$ **Relation 3**

$$\boxed{\delta(S) = -\arcsin\left(\sin(\lambda)\sin(23{,}45°)\right)}$$ **Relation 4**

3.3. Calcul de l'équation du temps

En travaillant sur le cercle équatorial orienté dans le sens trigonométrique, nous avons :

$$(\overrightarrow{\mathrm{TH}}, \overrightarrow{\mathrm{TS_M}}) = (\vec{\gamma}, \overrightarrow{\mathrm{TS_M}}) - (\vec{\gamma}, \overrightarrow{\mathrm{TH}}) = \mathrm{L} - \alpha(\mathrm{S})$$

Compte tenu du fait que E est traditionnellement exprimé en minutes, que c'est bien l'angle ci-dessus mais mesuré dans le sens horaire (indirect), et que 1° correspond à 4 minutes, nous avons (α et L seront remis entre 0 et 360 avant le calcul) :

$$\boxed{E \;=\; 4(\alpha(S) - L) \text{ minutes}}$$ **Relation 5**

L'équation du temps évolue très peu sur une journée et la valeur calculée à (12 : 00 TU) reste valable pour la journée complète.

3.4. Un exemple

Plaçons-nous à Charleville-Mézières le 24 mars 2021 à (12 : 00 TU), c'est à dire (13: 00 HL).

La relation NbreJours1901 donne :

$$N = 43913{,}5$$

La relation Longitude Moyenne donne (remis entre 0 et 360°) :

$$L \;=\; 0{,}9856473N \;+\; 278{,}97 = 43562{,}19271$$
$$L \;=\; 2{,}19°$$

La méthode vue dans le PV145 « vision héliocentrique des planètes » appliquée à la Terre donne :

$$M \approx 1{,}3767 \text{ rad.} \quad u \approx 1{,}3932 \text{ rad.} \quad v \approx 1{,}4096 \text{ rad.} \approx \; 80{,}77° \quad \varpi = \omega \approx 103{,}31° \quad \lambda \approx 184.07°$$

Les relation 3 et relation 5 donnent :

$$\alpha(S) \approx 3{,}74\,° \quad \delta(S) \approx 1{,}62°$$

puis l'équation du temps donne alors :

$$E \approx 6{,}18 \text{ minutes}$$

À cette période de l'année on a :

$$\delta\, H = +1h$$

et pour la longitude on a :

$$\theta = 4°\,45' Est = -4 \times \; 4{,}75 = -19 \text{ min}$$

Donc si on lit 15 : 15 sur un cadran solaire, l'heure légale est (avec la relation 1) :

$$HL = 15{:}15 + 00{:}06 - 00{:}19 + 01{:}00 = 16{:}02$$

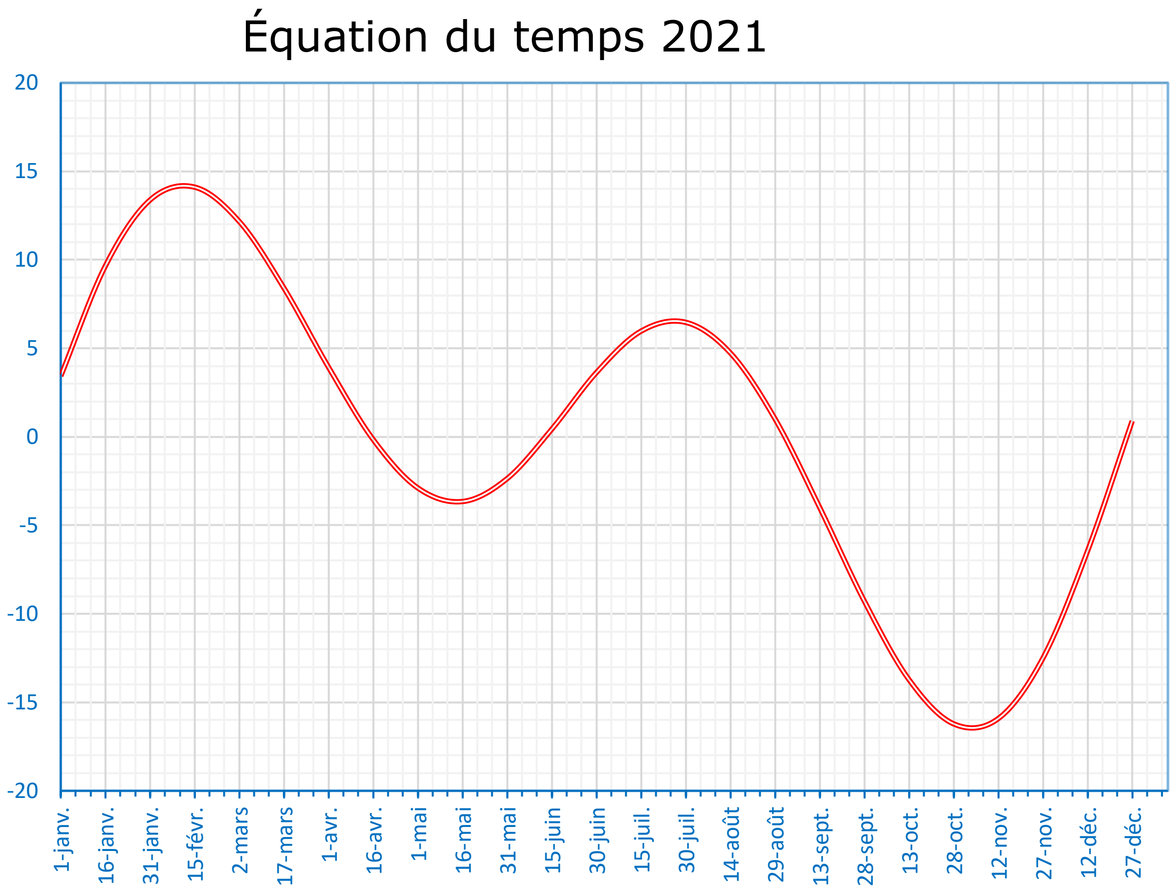
Retour au sommaire

3.5. Un graphique annuel

En programmant le processus de calcul dans un tableur on peut tracer l'évolution de l'équation du temps.

Sur le graphique qui suit, le calcul a été fait pour l'année 2021. D'une année à l'autre la courbe évolue très peu, se décalant jusqu'à trois jours avant le passage à une année bissextile. L'axe des abscisses est quadrillé de 5 jours en 5 jours et l'équation du temps est exprimée en minutes.

Remarquons que l'équation du temps s'annule 4 fois dans l'année (en 2021 les 15 avril, 13 juin, 1 septembre et 25 décembre) et que le décalage peut atteindre environ 17 minutes à son maximum (en valeur absolue).



Retour au sommaire