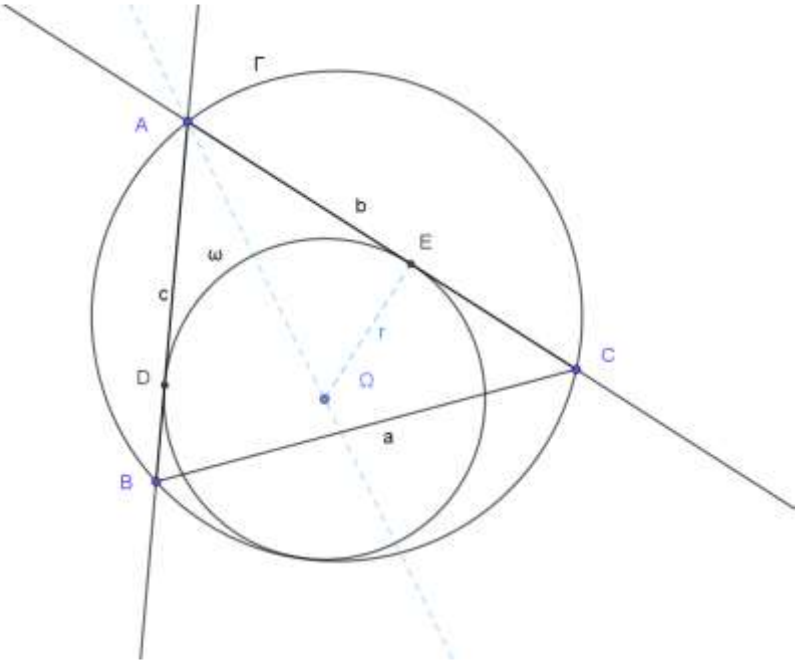
LE PROBLÈME DU TRIMESTRE N°145

Proposé par Jacques Choné

Énoncé

On considère un triangle ABC, son cercle circonscrit Γ et ω le cercle tangent intérieurement à Γ et aux côtés $[AB]$ et $[AC]$. Déterminer le rayon r de ω en fonction des longueurs des côtés a, b, c des côtés $[BC]$, $[AC]$et $[AB]$ du triangle ABC.



Le responsable de cette rubrique est Philippe Févotte. Vous pouvez lui envoyer vos solutions à ce problème. Des réponses, même partielles, seraient les bienvenues, ainsi que toute proposition de nouveau problème.

SOLUTION DU PROBLÈME N°144

Une solution a été proposée par Jacques Choné, qui signale que ce résultat est connu sous le nom de « théorème de convergence de Herschfeld ».

1) Supposons que la suite (v_n) est convergente.

Par construction, la suite (v_n) est croissante. Elle est donc majorée par un nombre $M > 0$.

On en déduit que :

$u_0 + \sqrt{u_1 + \sqrt{\ldots + \sqrt{u_n}}} \leq M^2$ et par conséquent $\sqrt{u_1 + \sqrt{\ldots + \sqrt{u_n}}} \leq M^2 - u_0 \leq M^2$

D'où $u_1 + \sqrt{\ldots + \sqrt{u_n}} \leq (M^2)^2$ et par conséquent $\sqrt{u_2 \ldots + \sqrt{u_n}} \leq (M^2)^2 - u_1 \leq (M^2)^2$

Puis $\sqrt{u_3 \ldots + \sqrt{u_n}} \leq ((M^2)^2)^2$, soit en itérant, $\sqrt{u_n} \leq M^{2^n}$

D'où $u_n \leq M^{2^{n+1}}$ (ce qui se démontrerait rigoureusement par récurrence).

Retour au sommaire

En conclusion : si (v_n) est convergente, alors il existe un nombre M tel que $u_n \leq M^{2^{n+1}}$

2) Montrons que la réciproque est vraie. Supposons qu'il existe un nombre M tel que, pour tout entier n, $u_n \leq M^{2^{n+1}}$

Notons $M_n = M^{2^{n+1}}$ et (w_n) la suite associée à la suite (M_n), définie par

$$w_n = \sqrt{M_0 + \sqrt{M_1 + \sqrt{\ldots + \sqrt{M_n}}}}$$

On a donc :

$w_0 = \sqrt{M_0} = \sqrt{M^2} = M$

$w_1 = \sqrt{M^2 + \sqrt{M_1}} = \sqrt{M^2 + \sqrt{M^4}} = M\sqrt{1 + \sqrt{1}}$

$w_2 = \sqrt{M^2 + \sqrt{M^4 + \sqrt{M^8}}} = M\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}$

En itérant, on obtient que $w_n = M\sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots \sqrt{1}}}$, avec $n + 1$ termes « 1 »

La suite, (w_n) est une suite connue, convergente vers $M\varphi$ avec $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (elle est croissante et on montre aisément qu'elle est majorée par $2M$)

De $u_n \leq M_n$ on déduit $v_n \leq w_n$; par conséquent la suite (v_n) est majorée par $2M$ (et même par $M\varphi$). La suite (v_n) est donc convergente.

En conclusion : s'il existe un nombre M tel que, pour tout entier n, $u_n \leq M^{2^{n+1}}$, alors la suite (v_n) est convergente.

Nous avons donc démontré que :

La suite (v_n) est convergente si et seulement s'il existe un nombre M tel que $u_n \leq M^{2^{n+1}}$.

COURRIER DES LECTEURS

Christelle nous écrit

Après une lecture rapide à la sortie du dernier Petit Vert, j'y suis retournée ce matin pour y chercher une ressource repérée : les générateurs d'exercices de Mathieu Foegel sur GeoGebra. Juste ce qu'il me fallait pour donner à mes élèves ce week end en révision avant le Bilan 4 de Noël : placer des points sur un cercle trigonométrique et réviser la lecture graphique de droites (tangentes et dérivation locale !) dans un repère. Aussitôt retrouvé aussitôt envoyé aux élèves. Il faut dire que je les vois peu la semaine prochaine mes élèves : 3 jours sur 5 à distance loin du lycée pour cette dernière semaine, ils vont surtout avoir la joie de revenir au lycée pour faire des ... DS... oh joie du présentiel.... Alors un petit coup de pouce pour s'entrainer chez eux est le bienvenu !!!

J'en ai profité pour relire plus calmement les autres articles que j'avais parcourus trop vite. M'amuser avec Maths et Médias, apprendre avec Gilles les mathématiques et les sciences de la vie, réfléchir avec les énigmes...

Et je le trouve très bien encore ce Petit Vert ! Félicitations aux auteurs...

Une petite mention spéciale pour l'article de Didier sur égalité, équité, justesse et justice, qui permet de remettre en perspective des mots souvent utilisés, mais insuffisamment réfléchis. Un article à partager.

À vous, chers lecteurs, d'alimenter cette nouvelle rubrique du Petit Vert. Le comité de rédaction accepte aussi les critiques☺ mais également vos suggestions et propositions… à vos claviers !

Retour au sommaire